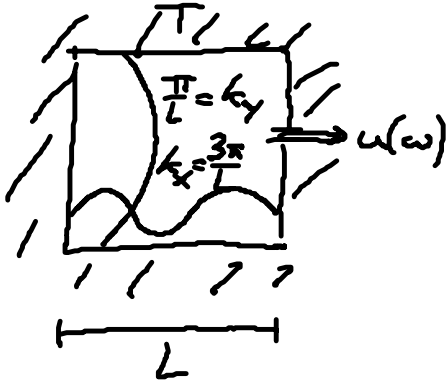


## 2. Das Versagen der klassischen Physik & Welle-Teilchen-Dualismus

a) Hohlraumstrahlung:



stehende Lichtwellen

(1) Wellenvektor  $\underline{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ ,

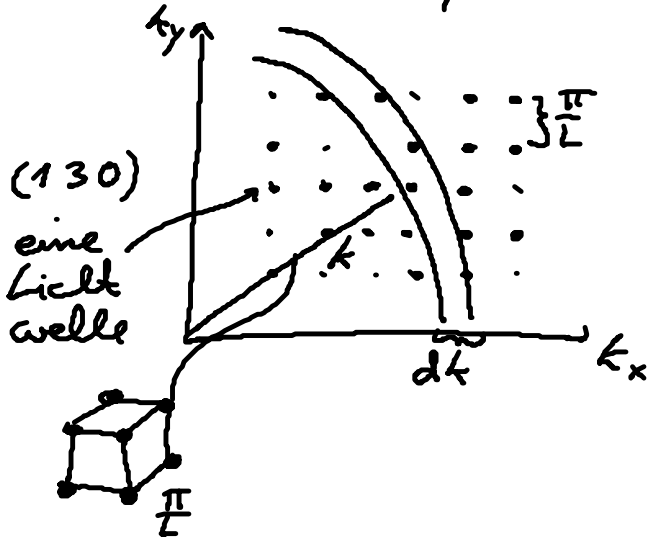
(2) spektrale Energiedichte  $u(\omega)$   $n_i = 1, 2, \dots$

sudem:  $u(\omega) L^3 d\omega$

klass. Berechnung:  $u(\omega) L^3 d\omega = N \text{ in } [\omega, \omega + d\omega] \times \text{mittlere Energie}$

(1) (2)

(1) mit  $\omega = c k$ ,  $N \text{ in } [k, k + dk]$   $k \gg \frac{\pi}{L}$



$$N = \frac{\frac{1}{8} \text{ Vol. Kugelschale}}{k\text{-Raum- Od. pro Zustand}} \times 2 \text{ Lichtpol.}$$

$$= \frac{2}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$$

$$\xrightarrow{k = \frac{\omega}{c}} N = \frac{L^3}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

(2) Gleichverteilungssatz der stat. Mechanik

Im thermischen Gleichgewicht besitzt jeder thermodynam. Freiheitsgrad eine mittlere Energie  $\frac{k_B T}{2}$   
[ $k_B T$  ... thermische Energie]

$k_B = 1,3806 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$  ... Boltzmann-Konstante

(2.3)

also:  $u(\omega) L^3 d\omega = N \cdot \frac{k_B T}{2} \cdot 2$  Lichtwelle: E & B-Feld

$$u(\omega) d\omega = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \quad (2.4)$$

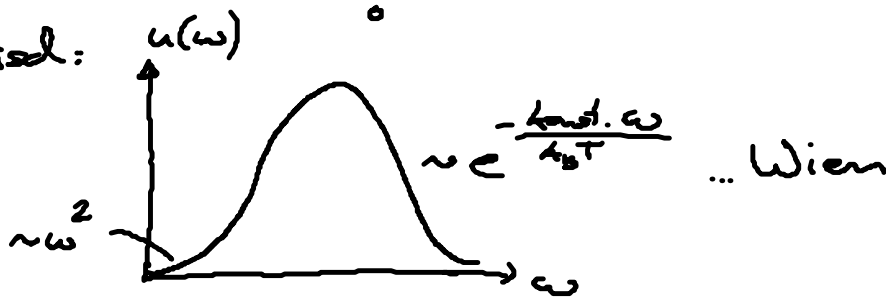
... Rayleigh-Jeans-Formel

$u(\omega, c, T)$  ... durch generelle Überlegung der stat. Mechanik gewonnen

Problem: "Ultraviolett-Katastrophe":  $u(\omega) \rightarrow \infty$  für  $\omega \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} u(\omega) d\omega = \infty \quad \text{!}$$

empirisch:



Planck: Anpassung durch Plancksche Strahlungsverteilung (1900):

$$u(\omega) = \frac{h}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{h\omega/k_B T} - 1} \quad (2.5)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} h &= 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ s} \quad \dots \text{ Plancksches Wirkungsquantum} \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ s} \end{aligned} \right\}$$

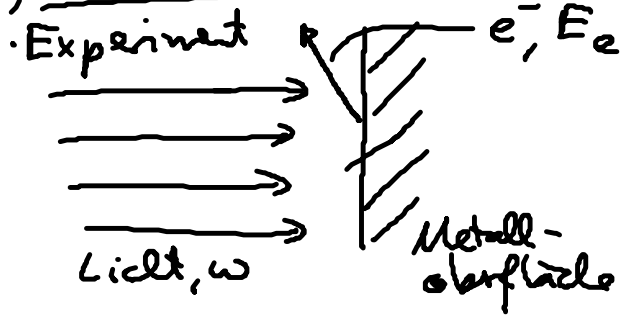
dann: Ableitung von (2.5) durch Planck mit Quantenhypothese:

im Gegensatz zur klass. Vorstellung!  $\left\{ \begin{aligned} &\text{Wandatom = Oszillatoren mit diskrete Energieniveaus:} \\ &\boxed{E_n = n h \omega = n h \nu} \quad (2.6) \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &\rightarrow \text{Absorption / Emission von Strahlung in Quanten } h\nu \end{aligned} \right.$

Planck: ungewollter Initiator der QT

„Geburtsstunde“ der QT

## b) Photoelektr. Effekt



exp. Befund:

Kinetische Energie des  $e^-$

$$E_e = \frac{m_e v_e^2}{2} = h\omega - W \quad (2.7)$$

(i)  $h$  tritt auf

(ii) " $E_e \sim \omega$ "

(iii)  $W \dots$  Austrittsarbeit

(iv)  $\omega < \frac{W}{h} \rightarrow$  keine emittierten  $e^-$

(v)  $E_e \neq f(\text{Intensität})$

• Deutung:

Einstein (1905): Licht besteht aus Photonen (Energiequanten)

Energie:  $h\nu$

Impuls:  $\underline{p} = h\underline{k}$

$(\omega, \underline{k})$   
Welle

$(E, \underline{p})$   
Teilchen

(2.8)

$\rightarrow e^-$  tritt aus, weil Photon beim Stoß Energie an  $e^-$  abgibt!

• Motivation von  $\underline{p} = h\underline{k}$

Photonen:  $v=c$ , damit  $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ,  $\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  endlich  
(hoch relativ. Teilchen)

$\rightarrow m=0$

(1.3)  $\rightarrow \boxed{E = pc} \stackrel{!}{=} h\nu = hck$

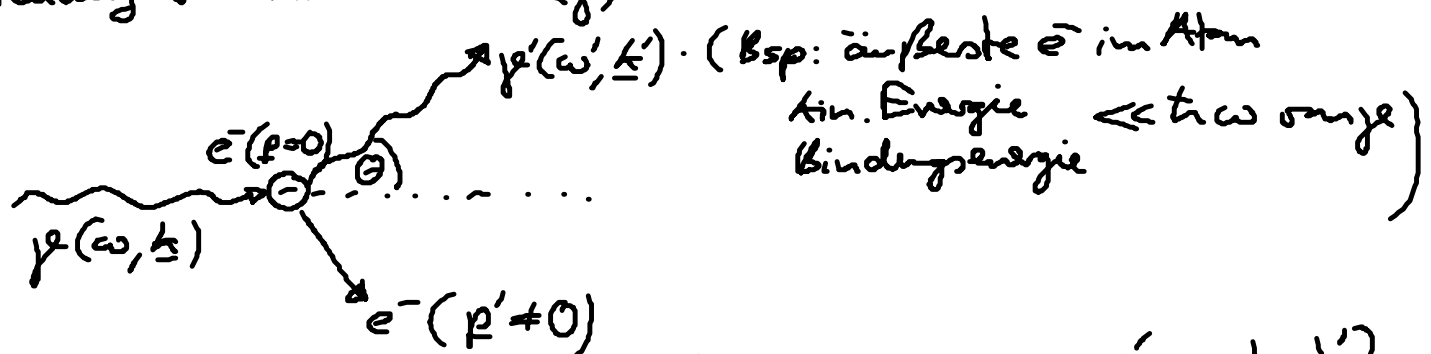
$\rightarrow \underline{p} = h\underline{k} \stackrel{\text{Sinn- u. Well}}{\text{well}} \neq h\underline{k} \quad \text{gel}$

• Viererimpuls Photon:

$$p^\mu \text{ mit } \begin{pmatrix} E/c \\ \underline{p} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} k = \frac{\omega}{c} \\ \underline{k} \end{pmatrix}$$

### c) Compton-Effekt (1925)

Streuung von Röntgenstrahlen ( $\gamma$ ) an "inhalten"  $e^-$



• Klassisch: Licht regt  $e^-$  zum Schwingen an  $\rightarrow \omega = \omega' \rightarrow \lambda = \lambda'$

Experiment:  $\omega' < \omega \rightarrow \lambda' > \lambda$

Deutung: Photon wird beim Stoß mit  $e^-$  gestreut  
Abgabe von Energie an  $e^- \rightarrow h\omega' < h\omega$

verwende:

Impulserhaltung  
Energie " (relativistisch)

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

mit 

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \dots \text{Compton-Wellenlänge des } e^-$$

... experimentell bestätigt

• Zahlen:  $\lambda_c(e^-) = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  [ $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ ]

$\lambda(\gamma) \approx 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$

$$\rightarrow \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \right)_{\text{max}} = 2 \frac{\lambda_c}{\lambda} \approx 0.04!$$

[d) weitreklass. Wellen mit Teilchen eigenschaft:

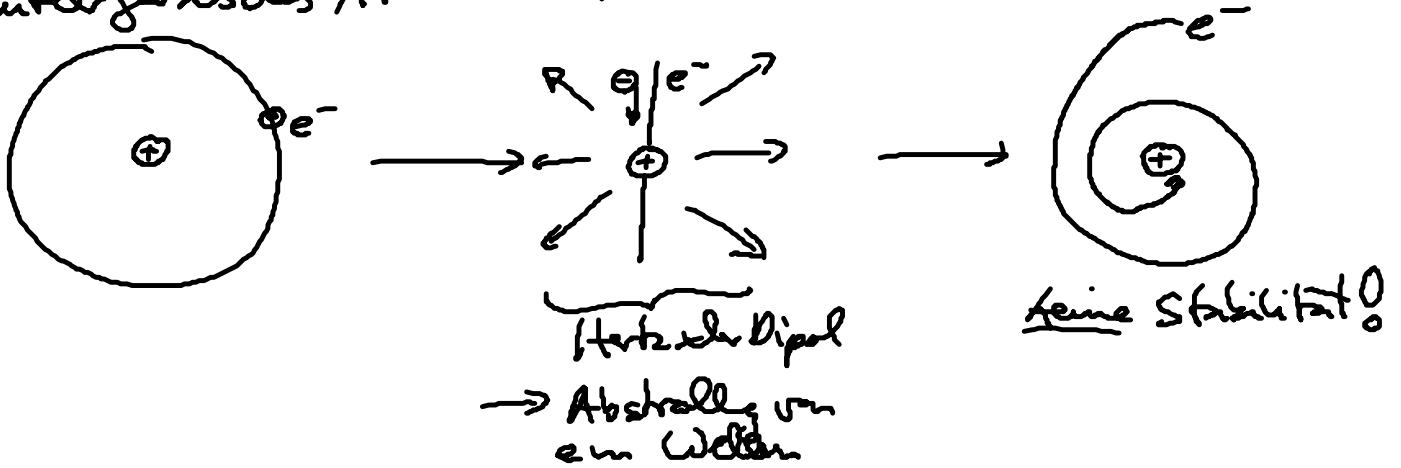
Gitterschwingungen im Kristall  $(\omega, \underline{k}) \longleftrightarrow$  Phononen  
 $E = \hbar\omega, \underline{p} = \hbar\underline{k}$

Anwendung: spezifische Wärme von Festkörpern

### 2.2. Klassisches Teilchen als Welle

a)  $e^-$  im Atom  $\neq$  klass. Teilchen

- Rutherford'sches Atommodell (1911)



- Experiment: diskrete Emissions- & Absorptionslinien  $\omega$

Bsp: H-Atom: verallgemeinerte Balmer-Formel

$$h\omega = R_y \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.9)$$

$$n, m = 1, 2, \dots$$

$R_y \approx 13,55 \text{ eV} \dots$  Rydberg Konstante

→ Bohr'sches Atommodell (1913)

(i) Bohr'sche Quantisierungsbedingung:

Nur diskrete Kreisbahnen erlaubt, festgelegt durch diskrete Wirkung

$$\oint p \, dq = n h \quad (2.10), n = 1, 2, \dots$$

(2.11)

(ii) Bahnen sind stabil

(iii) Spektrum (2.9):  $h\omega = E_m - E_n$

$E_m, E_n \dots$  diskrete Energieniveaus

Berechnung der diskreten Energieniveaus  $E_n$  aus (2.10)



$$\left. \begin{array}{l} q = \varphi \\ p_{\varphi} = m_e a_n v_n \end{array} \right\} \xrightarrow{(2.10)} m_e a_n v_n = \frac{nh}{2\pi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zentripetal} = \text{Coulombkraft.} \\ \frac{m_e v_n^2}{a_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{eliminiere} \\ v_n \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{a_n = \frac{h^2 (4\pi\epsilon_0)^2}{m_e e^2 n^2}} \quad (2.12)$$