

## 2.2 Klassisches Teilchen als Welle

a)  $e^-$  im Atom  $\neq$  klass. Teilchen

• Experiment: H-Atom:  $h\nu = R_y \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$  (2.8)

$$n, m = 1, 2, \dots$$

Spektrum

• Bohrsches Atommodell (1913)

$$\text{(i)} \oint \mathbf{p} d\mathbf{q} = n h \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

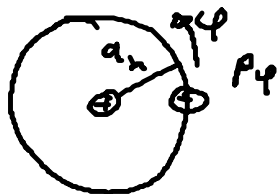
(ii) stabile Bahnen

$$\text{(iii) Spektrum (2.8): } h\nu = E_m - E_n$$

(2.11)

Berechnung der  $E_n$  aus (2.10)

Kreisbahn:



$$q = \phi$$

$$p_\phi = m_e a_n v_n$$

$$\left. \begin{array}{l} (2.10) \\ \end{array} \right\} \rightarrow m_e a_n v_n = n \frac{h}{2a_n} = n \frac{h}{2a_n}$$

Zentripetal = Coulombkraft

$$\frac{m_e v_n^2}{a_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2}$$

eliminiere  $v_n$

$$\rightarrow \boxed{a_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} n^2} \quad (2.12)$$

$$a_1 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \approx 0.5 \text{ \AA}$$

... Bohrscher Radius

$\hat{=}$  Ausdehnung des H Atoms

$$E = T + U$$

$$T = \frac{1}{2} m_e v_n^2$$

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n}$$

$$E_n = -R_y \frac{1}{n^2}$$

$$R_y = + \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13.60 \text{ eV}$$

(2.13)

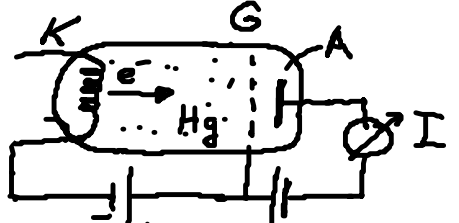
... diskrete Energieniveaus

(2.11(ii))  $\rightarrow$  (2.9)  $\infty$

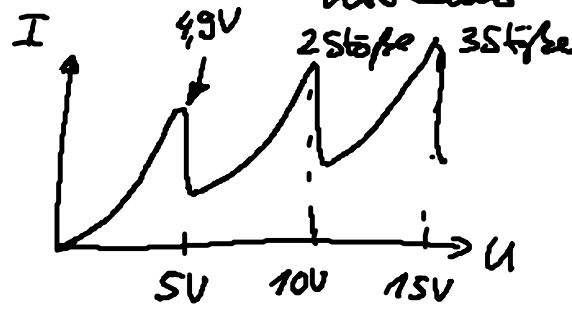
• Bohr-Modell (2.11) :- (2.10) ad-hoc Bedingung für klass. Bahnen  
 - klassisch nicht verständlich

• (2.10): verallgemeinert durch Sommerfeld auf Ellipsenbahnen

• Franck-Hertz-Versuch (1914)  $\rightarrow$  diskrete Energieniveaus



Bechl. spannung  $U$   
 Bremsspannung  $\times 0.5V$



Erklärung:  $4.9V \hat{=}$  erste Anregungsenergie im Hg Atom  
 $\rightarrow e^-$  gibt bei Stoß Energie ab  
 $\rightarrow$  bei  $U = 5V$  keine kinet. Energie mehr um gegen Bremsspannung anzulaufen  $\rightarrow I \downarrow$

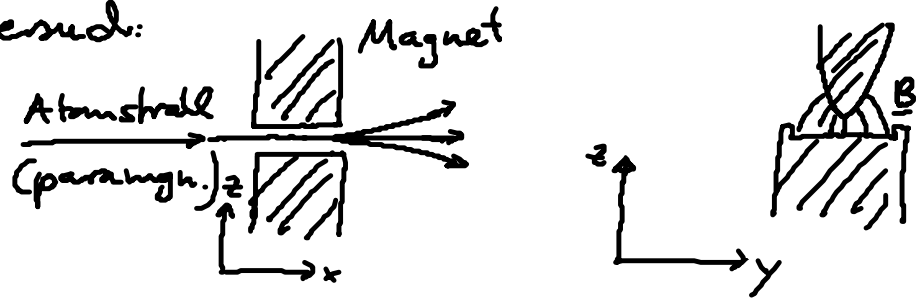
b) Drehimpuls-/Raumrichtungs-Quantisierung: Stern-Gerlach-Versuch (1922)

• paramagnetischen Atome:  
 permanentes magn. Moment  $\mu \sim \underline{L}$  ... Drehimpuls

• Kraft auf  $\mu$ :  $\underline{F} = \underline{\nabla}(\underline{\mu} \cdot \underline{B})$   $\underline{B}$  ... äußeres Magnetfeld

$B_x, B_y \ll B_z$   
 $\frac{\partial B_x}{\partial x} \approx \frac{\partial B_y}{\partial y} \ll \frac{\partial B_z}{\partial z}$   $\underline{F} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \underline{e}_z$  (2.15)

• Versuch:



Aufspaltung in  
weiße Strahlen

→  $\mu_2$  nicht kontinuierlich!

→  $l_2 \sim \mu_2$  quantisiert! (2.16)

### c) De Brogliesche Hypothese (1923)

- Ziel: einheitliche Beschreibung von Materie & Strahlung  
also: klassische Teilchen (z.B.  $e^-$ ) haben auch Welleneigenschaften:  
 $(E, p) \leftrightarrow (\omega, \underline{k})$  wie bei Photonen [vgl. (2.8)]

de Brogliesche Beziehung  
für Materiewelle:  
 $\psi(\underline{r}) \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

$E = \hbar \omega$	} $E = \frac{p^2}{2m}$ nichtrelativ. Teilchen	$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ ... Dispersions- welle
$p = \hbar \underline{k}$		

(2.17)

"eigentl." de Brogliesche Beziehung

(2.18)

- erste Interpretation:  
Phasengeschw.

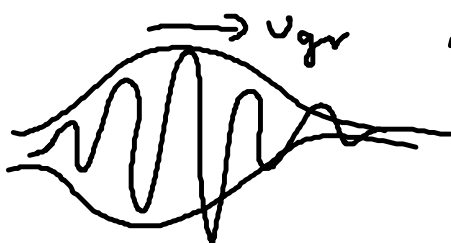
$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} \quad (2.19)$$

Gruppengeschw:  
[Geschw. eines Wellen-  
pakets s. (3.23)]

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{p}{m} \equiv v \quad (2.20)$$

... Teilchengeschw.

macht Sinn!



NB:  $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \stackrel{(2.18)}{=} \frac{dE}{dp} = v$

also:  $v_{ph} = v_{ph}(k)$   
 $v_{ph} = \frac{1}{2} v$  (2.21)

→ Dispersion/Zerlaufen  
eines Wellenpakets

[s. Kap. 3.1.f]

• NB:

nichtrelativ. Teilchen:  $E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} \rightarrow \omega = \omega_0 + \frac{\hbar k^2}{2m}$

- Erklärung für (2.10):  $\oint p dq = nh$   
stehende Materiewelle im Atom:

ändert  $v = v_{gr}$   
nicht



$$\oint p dq = \oint \underbrace{p_n a_n}_{p\varphi} d\varphi = \underbrace{2\pi a_n}_{=n\lambda_n} \underbrace{p_n}_{h \frac{2\pi}{\lambda_n}} = nh \quad \text{qed}$$

### d) Quantentheorie des Atoms

- Heisenbergsche Matrixmechanik (Sommer 1925) (mit Born, Jordan 1926)  
dynam. Gl. für "Observablen", "abstraktere Theorie" (s. Teil II)

↑  
Matrizen

- Schrödinger (1926)

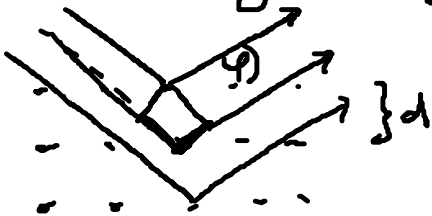
Schrödinger-Gleichung  $\hat{=}$  Wellengleichung für Materiewelle  
 $\hat{=}$  Verallgemeinerung der de Broglie-Welle auf Teilchen im Potential

"anschaulichere" Theorie, Hauptinhalt der Vorlesung

- Beide Formulierungen sind äquivalent!

### e) Davisson-Gerner (1927)

- $e^-$ -Wellen zeigen Bragg-Reflexion an Ni-Kristall



Bragg-Reflexe:  $2d \sin\theta = n\lambda$   
Gangunterschied  
zwischen Strahlen

- (i) Bestätigung von (2.17)
- (ii) Materiewellen zeigen Interferenz!

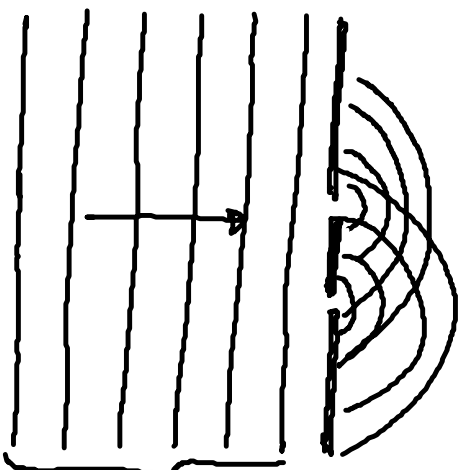
## 2.3 Welle-Teilchen-Dualismus

• Bedeutung?

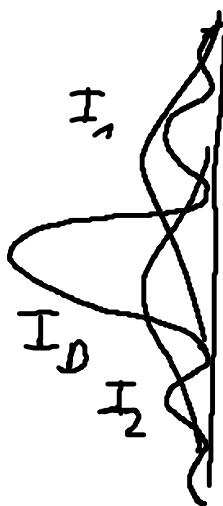
• Gedankenexperiment:

Doppelspaltversuch: →

- (i) Bedeutung der Materiewelle
- (ii) " des Dualismus



Materiewelle  
Intensität  $I_0$



Schirm: Fotoplatte oder  
Fläche von Detektoren

$I(x)$  ... Intensität der Welle

→ typisches Spaltbeugungsmuster  $I_0$  für in der-  
ferierende Wellen

• Variante 1:  $I_0 \rightarrow 0$

Klass. Welle: Beugungsmuster durch gleichmäßige Schwärzung der Platte

Exp. :  
[ein  $e^-$  nach  
dem anderen]

" " " " " "  
→ (i)  $e^-$  als Teilchen

(ii) Materiewelle regelt wo  $e^-$  auftrifft,  
also Bedeutung für einzelnes  $e^-$

• Variante 2: Annahme:  $e^-$  ist klass. Teilchen während der Beugung

→  $e^-$  trifft entweder durch Spalt 1 oder 2

$$\rightarrow I_0(x) = \underbrace{I_1(x)}_{\substack{\text{Spalt 1 auf} \\ \cdot 2 \text{ zu}}} + \underbrace{I_2(x)}_{\substack{\text{Spalt 1 zu} \\ \text{Spalt 2 auf.}}}$$

$$\text{aber } I_b(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$$

- (i) Wellencharakter & Interferenz wichtig im Doppelspaltversuch
- (ii)  $e^-$  hat keine klass. Bahn mehr