

2.2 Klassisches Teilchen als Welle

a) e^- im Atom \neq Klass. Teilchen

• Experiment: H-Atom: $h\nu = R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ (2.8)

$$n, m = 1, 2, \dots$$

Spektrum

• Bohrsches Atommodell (1913)

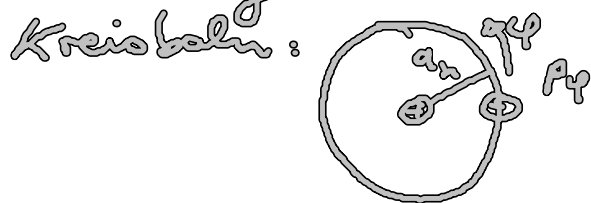
$$\text{(i)} \quad \oint \mathbf{p} \, dq = n h \quad n=1, 2, \dots \quad (2.10)$$

(ii) stabile Bahnen

(2.11)

$$\text{(iii)} \quad \text{Spektrum (2.8)}: h\nu = E_m - E_n$$

Berechnung der E_n aus (2.10)



$$\left. \begin{array}{l} q = \varphi \\ p_t = m_e a_n v_n \end{array} \right\} \xrightarrow{(2.10)} m_e a_n v_n = n \frac{h}{2\pi} = n h$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zentripetal = Coulombkraft} \\ \frac{m_e v_n^2}{a_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2} \end{array} \right\} \text{eliminiere } v_n$$

$$\longrightarrow a_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} n^2 \quad (2.12)$$

$$a_1 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \approx 0.5 \text{ \AA} \quad \dots \quad \text{Bohrscher Radius} \\ \approx \text{Ausdehnung des H Atoms}$$

$$E = T + U \\ \xrightarrow{\quad} \\ T = \frac{1}{2} m_e v_n^2 \\ U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n}$$

$$E_n = -R_y \frac{1}{n^2} \\ R_y = + \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13.60 \text{ eV} \quad (2.13)$$

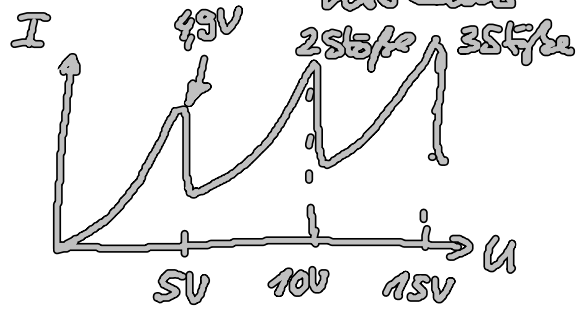
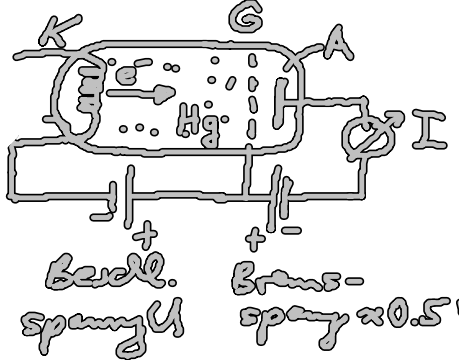
... diskrete Energieniveaus

(2.14(ii)) \rightarrow (2.9) ∞

• Bohr-Modell (2.14) :- (2.10) ad-hoc Bedingung für klass. Bohren
 - klassisch nicht erfüllt

• (2.10): verallgemeinert durch Sommerfeld auf Ellipsenbahnen

• Franck-Hertz-Experiment (1914) \rightarrow diskrete Energieniveaus



Erklärung: 4,9V $\hat{=}$ erste Anregungsenergie im Hg Atom
 $\rightarrow e^-$ gibt bei Stoß Energie ab
 \rightarrow bei $U \approx 5V$ keine kinet. Energie mehr um gegen Bremsspannung anzulaufen $\rightarrow I \downarrow$

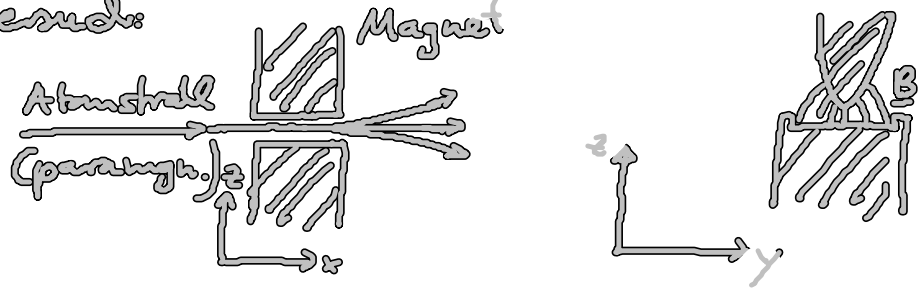
b) Drehimpuls-/Ramanstreuung-Quantisierung. Stern-Gerlach-Versuch (1922)

• paramagnetische Atome:
 permanentes magn. Moment $\mu \sim \hbar$... Drehimpuls

• Kraft auf μ : $\underline{F} = \underline{\nabla}(\mu \cdot \underline{B})$ \underline{B} .. äußeres Magnetfeld

$B_x, B_y \ll B_z$
 $\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} \ll \frac{\partial B_z}{\partial z}$ $F = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{e}_z$ (2.15)

• Versuch:



Aufspaltung in
weige Strahlen

→ μ_2 nicht kontinuierlich!

→ $l_2 \sim \mu_2$ quantisiert! (2.16)

c) De Brogliesche Hypothese (1923)

- Ziel: eine einheitliche Beschreibung von Materie & Strahlung
also: klassische Teilchen (z.B. e^-) haben auch Welleneigenschaften:
 $(E, p) \leftrightarrow (\omega, \underline{k})$ wie bei Photonen [vgl. (2.8)]

de Brogliesche Beziehung

für Materiewelle:

$$\psi(\underline{r}) \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$E = \hbar \omega$$

$$p = \hbar \underline{k}$$

(2.17)

"eigentl." de Brogliesche Beziehung

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

nichtrelativ.
Teilchen

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

... Dispersions-
welle

(2.18)

- erste Interpretation:
Phasengeschw.

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

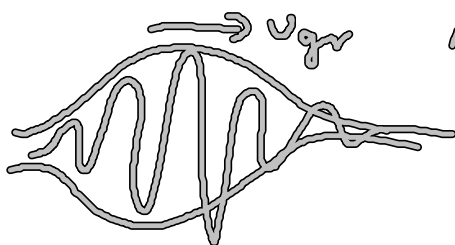
(2.19)

Gruppengeschw:
[Geschw. eines Wellen-
pakets s. (3.23)]

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{p}{m} \equiv v$$

... Teilchengeschw.

macht Sinn!



NB: $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{dE}{dp} = v$

also:

$$v_{ph} = v_{ph}(k)$$

$$v_{ph} = \frac{1}{2} v$$

(2.21)

→ Dispersion/Verlaufen
eines Wellenpakets

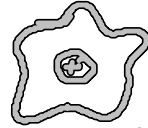
[s. Kap. 3.1.f]

• NB:

nichtrelativ. Teilchen: $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \rightarrow \omega = \omega_0 + \frac{\hbar k^2}{2m}$

- Erklärung für (2.10): $\oint p dq = nh$
stehende Materiewelle im Atom:

↳ ändert $v = v_{gr}$
nicht



$$\oint p dq = \oint \underbrace{p_n a_n}_{p q} d\varphi = \underbrace{2\pi a_n}_{= n \lambda_n} \underbrace{p_n}_{h \frac{2\pi}{\lambda_n}} = nh \quad \text{qed}$$

d) Quantentheorie des Atoms

- Heisenbergsche Matrixmechanik (Sommer 1925) (mit Born, Jordan 1926)
dynam. Gl. für „Observablen“, „abstraktere Theorie“ (s. Teil II)

↑
Matrizen

- Schrödinger (1926)

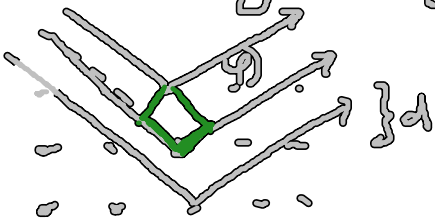
Schrödinger-Gleichung $\hat{=}$ Wellengleichung für Materiewelle
 $\hat{=}$ Verallgemeinerung der de Broglie-Welle auf Teilchen im Potential

„anschaulichere“ Theorie, Hauptinhalt der Vorlesung

- Beide Formulierungen sind äquivalent!

e) Davission-Germer (1927)

- e^- -Wellen zeigen Bragg-Reflexion an Ni-Kristall



Bragg-Reflexe: $2d \sin \varphi = n \lambda$
Gegenschied
zwischen Strahlen

- (i) Bestätigung von (2.17)
- (ii) Materiewellen zeigen Interferenz!

2.3 Welle-Teilchen-Dualismus

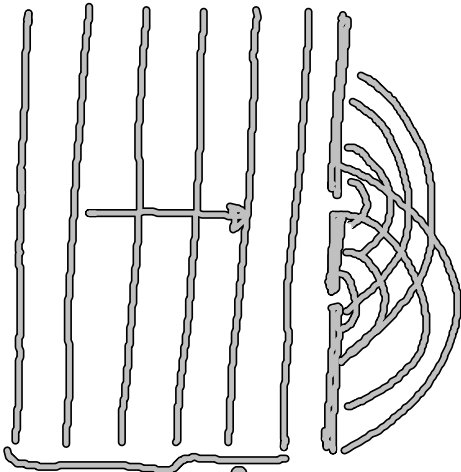
• Bedeutung?

• Gedankenexperiment:

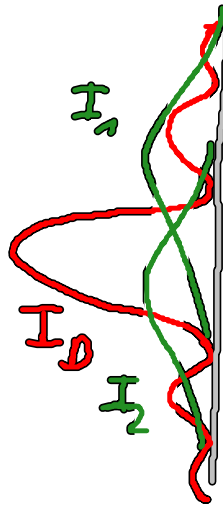
Doppelspaltversuch \rightarrow

- (i) Bedeutung der Materiewelle
- (ii) " des Dualismus

Schirm: Fotoplatte oder
Fluoreszenzschirm



Materiewelle
Intensität I_0



$I(x)$.. Intensität der Welle

\rightarrow typisches Spaltbeugungsmuster I_0 für in der-
ferierende Wellen

• Variante 1: $I_0 \rightarrow 0$

Klass. Welle: Beugungsmuster durch gleichmäßige Schwingung der Platte

Exp. : " , ppt.förmige " "
 [ein e^- nach dem anderen]

\rightarrow (i) e^- als Teilchen

(ii) Materiewelle regelt wo e^- ankommt,
also Bedeutung für einzu- e^-

• Variante 2: Annahme: e^- ist klass. Teilchen während der Beugung

$\rightarrow e^-$ hitet entweder durch Spalt 1 oder 2

$$\rightarrow I_0(x) = \underbrace{I_1(x)}_{\text{Spalt 1 auf } 2 \text{ zu}} + \underbrace{I_2(x)}_{\text{Spalt 1 zu } 2 \text{ auf}}$$

$$\text{aber } I_D(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$$

- (i) Wellencharakter & Interferenz wichtig im Doppelspaltversuch
- (ii) e^- hat keine klass. Bahn mehr