2.3 Welle-Teilchen-Dualismus

- Realisierung: C. Jönsson (1961), Uni Tübingen
  [schwierig: Fabrikation des Doppelspalts, Nanotechnologie]
- Dualismus gilt für: e^-, p, n, ..., C_{60} (Fullerene, Fußbälle)
- Folgerungen: „Kopenhagener Deutung" der QT
  (maßgeblich von Bohr in Kopenhagen)

1. Welle-Teilchen-Dualismus (Bohrsche Komplementarität):
   a) Beide Eigenschaften sind zur Erklärung von Experiment notwendig
   b) Bei Messung tritt nur eine Eigenschaft in Erscheinung $\longrightarrow$ kein Widerspruch
2. Klassische Bahnen von Teilchen existieren nicht mehr. Zwischen 2 Messungen kann keine Bahn festgelegt werden.
3. Statistische Deutung der Materiewelle $\Psi(\underline{r},t)$ (Born, 1926):

   $|\Psi(\underline{r},t)|^2 d^3r$ .. Wahrscheinlichkeit, Teilchen bei $\underline{r}$ im Volumen d^3r zu finden (2.23)

   $|\Psi(\underline{r},t)|^2$ ... Wahrscheinlichkeitsdichte

   Normierung: $\int_{\text{gesamtes Volumen}} d^3r\, |\Psi(\underline{r},t)|^2 = 1$ (2.24)

• Welle-Teilchen-Dualismus: auch für Photonen (s. Kap. 2.1)
Achtung: em Feld ist *nicht* Wahrscheinlichkeitswelle
Photon folgt aus „Quantisierung" des em-Feldes
≙ QED (Quantenelektrodynamik)

2.4. Kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

• Def.:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{stochastische}\\ \text{Zufalls-}\end{array}\right\}\text{Variable} \;\hat{=}\; \begin{array}{l}\text{Wertebereich}\\ \text{\& Wahrscheinlichkeitsverteilung } P(x)\end{array}} \quad (2.25)$$

• diskrete Verteilung: $x = x_1, x_2, \dots, x_N$

$P(x_i)$ … Wahrscheinlichkeit für x_i

$\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$ … Normierung

Bsp: Würfel x … Wurfzahl

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6$

$P(x_i) = \frac{1}{6} \quad i = 1, \dots, 6 \longrightarrow \sum_{i=1}^{6} P(x_i) = 1$

• kontinuierliche Verteilung:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in [x_1, x_2] \\ P(x)\,dx \dots \text{ Wahrscheinlichkeit für } [x, x+dx] \\ \int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx = 1 \end{array}} \quad (2.26)$$

• Mittel-/Erwartungswert einer Observablen $f(x)$:

$$\boxed{\langle f \rangle = \int f(x)\,P(x)\,dx} \quad (2.27)$$

Bsp: Würfel:
mittlere Wurfzahl: $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{6} x_i\,P(x_i)$

$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$

- $\boxed{n\text{.tes Moment von } P(x): \quad \langle x^n \rangle = \int x^n P(x)\, dx}$ (2.28)

Mittelwert: $\langle x \rangle$

Varianz = mittlere quadratische Abweichung von $\langle x \rangle$ (2.29)

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - \langle x \rangle^2 \rangle = \mathrm{Var}(x)$$

$$\langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$
$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2$$

Standardabweichung: $\sqrt{\mathrm{Var}(x)}$ ... "Breite" von $P(x)$ (2.30)

Bsp: Gaußsche Verteilung: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, dx = 1$

s. Übungen

- $\boxed{\text{Kenntnis aller } \langle x^n \rangle \longleftrightarrow P(x)}$ (2.31)

$\langle (x-x_0)^n \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ (n-1)!!\,\sigma^n, & n \text{ gerade} \end{cases}$

Beweis: s. Übungen

3. Die Schrödinger-Gleichung

- Ges: Wellengleichung für Materie-/ Wahrscheinlichkeitswelle

3.1. Die freie Schrödinger-Gleichung (SG)

freies Teilchen, ohne Potential, nicht-relativistisch!

• Forderungen an SG:

1. ebene Welle mit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ als Lsg.
2. Dgl. 1. Ordnung in der Zeit $\longrightarrow$ $\psi(\underline{r},t)$ durch Anfangsverteilung $\psi(\underline{r},t=0)$ bestimmt.
3. linear & homogene Dgl.
   $\longrightarrow$ Superpositionsprinzip gilt für verschiedene ebene Wellen
   ($\rightarrow$ Wellenpaket, s. Kap. 3.2)
4. homogene Dgl. $\longrightarrow$ $|\psi|^2$ ... Erhaltungsgröße
   $\hat{=} \int_V d^3r \, |\psi(\underline{r},t)|^2 = 1$ (vgl. Kap. 3.4)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \underline{\nabla}^2 \psi \quad \text{mit } \underline{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \quad (3.1)$$

... Laplace-Operator

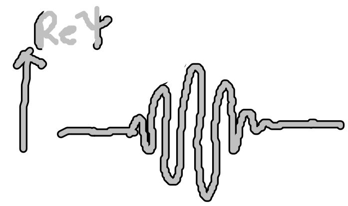
• Lsg? ebene Welle: $\psi(\underline{r},t) = A\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$ (3.2)

$$\xrightarrow[(3.1)]{\text{in}} \hbar\omega\psi = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\psi \rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ gel.}$$

• Bem: $\cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$, $\sin(\ldots)$ keine Lsg. von (3.1)!
$\longrightarrow$ nur komplexe Wellen

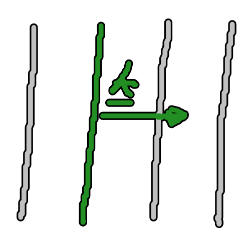
3.2. Wellenpakete

• Ziel: freies Teilchen = Wellenpaket



a) **ebene Welle:**

• Raum-Zeit-Pkte gleicher Phase
in (3.2): $\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t = \alpha$ ... Phase



- Phasengeschw. $\underline{v}_{ph}$:

bilde $\frac{d}{dt}(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t=\alpha) \rightarrow \underline{k}\cdot\underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}_{ph}}=\omega$

$$\rightarrow \underline{v}_{ph}=\frac{\omega}{k}\,\hat{\underline{k}}\,,\quad \hat{\underline{k}}=\frac{\underline{k}}{k}$$

mit $\omega=\frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow$ $\boxed{\underline{v}_{ph}=\frac{\hbar k}{2m}\,\hat{\underline{k}}=\frac{\underline{p}}{2m} = \frac{\underline{v}}{2}}$ (3.3)

de Broglie $\underline{p}=\hbar\underline{k}$

- $\psi=A\,e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \longrightarrow$ (i) $|\psi(\underline{r},t)|^2=|A|^2=$ konst.

... Teilchen überall mit gleicher Wahrscheinlichkeit

(ii) $\iiint_{-\infty}^{\infty} d^3r\;|\psi(\underline{r},t)|^2$ "$=\infty$" ... $\overset{!}{=}\cancel{\infty}$ i.f. weglassen

nicht normierbar!

ebene Welle $\hat{=}$ idealisierter Teilchenzustand

Abhilfe zu (ii): (1) normierbare Wellenpakete

(2) endliches Volumen $V \longrightarrow A=\frac{1}{\sqrt{V}}$

b) <u>Fourier-Transformation</u> (1dim): „Entwicklung nach ebenen Wellen"

Satz: Geg.: stückweise, stetiges $f(x)$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx\;|f(x)|<\infty$ (*)

$\longrightarrow$ Fourier-Transformierte: $\bar{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,f(x)\,e^{-ikx}$ (3.4)

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ Fourier-Entwicklung:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\,\bar{f}(k)\,e^{ikx}$$

Amplitude / ebene Welle