

5.4. Zeitentwicklung eines Zustandes

• Darstellung für die höchst. EW-Spektren von \hat{A} :

• allg. Anfangszustand.

(5.21)

$$\psi(\mathbf{r}, 0) \stackrel{\text{von}}{=} \sum_n c_n \varphi_n(\mathbf{r}), \quad \int |\psi(\mathbf{r}, 0)|^2 d^3r = \sum_n |c_n|^2 = 1$$

$$\text{mit } \hat{A} \varphi_n(\mathbf{r}) = E_n \varphi_n(\mathbf{r}) \text{ und } c_n = \langle \varphi_n | \psi(\mathbf{r}, 0) \rangle$$

$$\rightarrow \text{Zeitentwicklung: } \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n e^{-i E_n t / \hbar} \varphi_n(\mathbf{r})$$

Beweis: $\psi(x,t)$ Lsg. der SG?

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_n c_n E_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x) = \hat{H} \underbrace{\sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)}_{\psi(x,t)} = \hat{H} \psi \quad \text{qed}$$

• Zeitrichtung:

$$\text{Löse } \hat{H} \psi_n = E_n \psi_n \rightarrow \psi(x,t)$$

6. Meßprozeß in der QT

• Meßprozeß:

3. Beobachter \longleftrightarrow 2. Meßapparatur \rightarrow 1. System

Klass. Physik: Komponenten beeinflussen sich nicht

QT: Wo von 1. & 2. verändert System

Bsp: Doppelspalt exp.

6.1. QT-Meßprozeß

- (i) einzelne Messung \rightarrow Meßwert
- (ii) Mittelung über viele Einzelmessungen an identisch präparierten Systemen (Ensemble) \rightarrow Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ (s. Kap. 4.2)

• Bsp: Beugung am Doppelspalt:

(i) Beugung vieler $e^- \rightarrow \langle \hat{r} \rangle, \Delta r$, bestimmt durch Spaltbeugungsfktn.
 $= |\psi(r)|^2$

(i) Bewegung eines e^- \longrightarrow lokale Schwärzung des Schirms
 $\hat{=}$ Ortsmessung \mathcal{V}_0

offbar: Änderung von $\psi(\mathbf{r})$
 $\longrightarrow \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$

6.2. Meßwerte der Einzelmessung?

• zunächst:

a) System im Eigenzustand von \hat{A} :

• $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r})$ mit $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$ (diskretes EW-Spektrum)

$$\longrightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \underbrace{a_n}_{a_n \psi_n} \underbrace{\langle \psi_n | \psi_n \rangle}_1 = a_n$$

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \rangle$$

$$= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = \underbrace{\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle}_{a_n^2 \psi_n} - a_n^2 = 0$$

\longrightarrow

a_n wird mit Sicherheit gemessen
 $\longrightarrow a_n$ Meßwert (6.1)

b) allgemeiner Zustand:

• Entwickle nach VONS von Eigenzuständen der Observablen \hat{A} :

disk. EW: $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$

kont. EW: $\hat{A}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$

$$\longrightarrow \psi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \sum_n c_n(t) \psi_n(\mathbf{r}) & , c_n(t) \stackrel{(5.12)}{=} \langle \psi_n | \psi(t) \rangle \\ \int d\lambda c_\lambda(t) \psi_\lambda(\mathbf{r}) & , c_\lambda(t) \stackrel{(5.16)}{=} \langle \psi_\lambda | \psi(t) \rangle \end{cases} \quad (6.2)$$

NB: VONS nötig für (6.2) \longrightarrow Observable = hermitescher \hat{A}
 mit VONS von EV

$$\rightarrow \langle \hat{\lambda} \rangle = \begin{cases} \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \\ \int d\lambda |c_\lambda(t)|^2 \lambda \end{cases} \quad (6.3)$$

Beweis: disk. EW!

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \sum_n c_n \psi_n | \hat{A} | \sum_m c_m \psi_m \rangle$$

$$= \sum_{n,m} c_n^*(t) c_m(t) \underbrace{\langle \psi_n | \hat{A} | \psi_m \rangle}_{a_n \langle \psi_n | \psi_m \rangle = a_n \delta_{nm} \text{ gel}} = \sum_n |c_n(t)|^2 a_n$$

Deutung:

1. $a_{n/\lambda} \dots$ Meßwerte der einzelnen Messungen
2. $|c_{n/\lambda}(t)|^2 \dots$ Wahrscheinlichkeit mit der
 - (i) $\psi_{n/\lambda}(\psi)$ in $\psi(\psi)$ auftritt
 - (ii) $a_{n/\lambda}$ gemessen wird
3. Bei der Messung "kollabiert" die Wellenfkt. nach der Eigenfkt. ψ_n zum gemessenen Eigenwert a_n

(6.4)

• Bsp: $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n |c_n(t)|^2 E_n$, $c_n(t) = \langle \psi_n | \psi(t) \rangle$ (6.5)

$\langle \hat{p} \rangle = \int d^3p \ p \ |\bar{\psi}(p)|^2$, $\bar{\psi}(p,t) \stackrel{(5.19)}{=} \langle \psi_p | \psi(t) \rangle$ (6.6)

$$\langle \hat{x} \rangle = \int d^3 r_0 \ r_0 |\psi(r_0)|^2, \quad \psi(r_0, t) \stackrel{(6.10)}{=} \langle \psi_{r_0} | \psi(t) \rangle \quad (6.7)$$

$$\hat{x} \psi_{r_0}(x) = r_0 \psi_{r_0}(x) = \int d^3 r \ \delta(r-r_0) \psi(r, t)$$

NB: $\psi(r, t)$ ist ψ projiziert auf die EU von \hat{x} !!!

• Heisenbergsche Unschärferelation: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

→ (i) \hat{x}, \hat{p} haben keine gemeinsamen EU (s. Teil II)

(ii) Bsp: $\psi \sim \delta(x-r_0) \sim \int dp \ e^{\frac{i}{\hbar} p(x-r_0)}$

→ $\Delta x = 0, \Delta p = \infty$ $\hat{=}$ alle p mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorhanden

8. Lösungen der 1 dim. (stationäre) SG

• Grundgleichung:

$$1D: U(x) = U(x) \rightarrow \psi(x) = \psi(x)$$

$$\rightarrow SG: \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad (8.1)$$

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [U(x) - E] \psi(x), \quad ' = \frac{d}{dx} \quad (8.2)$$

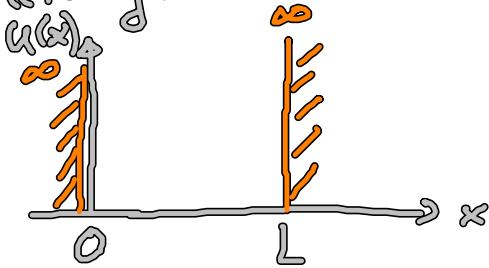
• Aussage zu $\psi(x)$:

(i) $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ } $\psi(x)$ endlich (P.3)
 fortlaufende Welle

(ii) endliches $U(x) \xrightarrow{(8.2)} \psi''(x)$ endlich $\xrightarrow{\int \dots dx} \psi'(x)$
 $\xrightarrow{\int \dots dx} \psi(x) \dots$ stetig, glatt

8.1 Unendlich tiefes Potentialtopf

• Problemstellung:



Beschränkung des Teilchens
auf endl. Volumen
 $\psi(x) \neq 0$ für $x \in (0, L)$

• Idealisierung: „scharfe“ Potentialkante $U_0 \gg E$

• Eigenwertproblem (8.1/2)

$$\rightarrow \psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (8.4)$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \dots \text{Randbed.} \quad (8.5)$$

↳ Lsg.:

$$\text{Eigenfkt.}: \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Energie-EW: } E_n = -\frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$$

Kern: (i) $\sin(\dots)$ löst (8.4), diskrete k_n wegen Randbed. / endl. Volumen

→ diskretes Spektrum von E_n

$$(ii) \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (n=m \rightarrow \text{Normierungsfaktor } \sqrt{\frac{2}{L}})$$