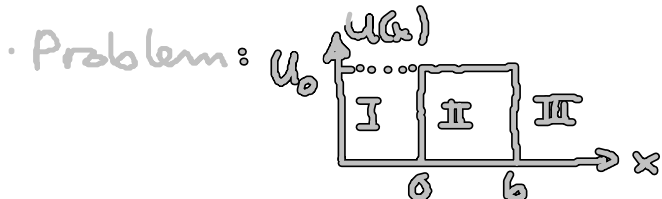


8.3 Potentialschwelle - Tunneleffekt



$$(8.15) \begin{cases} \psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{-\kappa x} + B_2 e^{\kappa x} \\ \psi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} \end{cases}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\kappa = \frac{2m}{\hbar} (U_0 - E) = \begin{cases} > 0, E < U_0 \\ < 0, E > U_0 \end{cases}$$

$$\eta = \frac{\kappa}{k} \quad (8.14)$$

• Anschlussbed. (8.10)

$$\longrightarrow A_1(A_3), B_1(A_3), A_2(A_3), B_2(A_3) \quad (8.18)$$

$\begin{cases} \kappa > 0, E < U_0 \\ \kappa = iK, E > U_0 \end{cases}$

d) Diskussion:

• Transmissionskoeffizient (- Wahrscheinlichkeit)

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)^2 \left(\frac{1}{2} |\sinh(\kappa b)| \right)^2} \ll 1!$$

(8.19)

Reflexionskoeffizient:

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 \stackrel{(8.18)}{=} 1 - T \quad \dots \text{Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit}$$

• Tunneleffekt: $T \neq 0$ für $E < U_0$, $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$

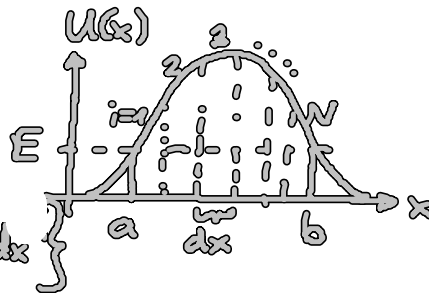
für $\kappa b \gg 1$: sehr hohe und breite Schwelle

$$(8.19) \xrightarrow{\sinh x \approx \frac{1}{2} e^x} T \approx \left(\frac{4\eta}{\eta^2 + 1} \right)^2 e^{-2\kappa b} \quad (8.20)$$

Bem: kont. Potentialschwelle

o.B.

$$T = \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int \sqrt{2m[U(x_i) - E]} dx \right\}$$



$$= \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^N \sqrt{2m [U(x_i) - E]} dx \right\}$$

$$N \rightarrow \infty \rightarrow T = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m [U(x) - E]} dx \right\} \quad (8.21)$$

• Streuung: $E > U_0$, $\kappa = iK = \frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$
 $= \frac{i}{\hbar} \sqrt{2mU_0} \sqrt{\frac{E}{U_0} - 1}$
 $\eta = \frac{\kappa}{k} = i \frac{K}{k} = iL$

$$\frac{\sinh(ix) = i \sin x}{(8.14)} \rightarrow T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left| 1 - \frac{1}{L} \right|^2 \sin^2 Kb} \quad (8.22)$$

$T = T\left(\frac{E}{U_0}\right)$... Teilchen "spürt" Schwelle

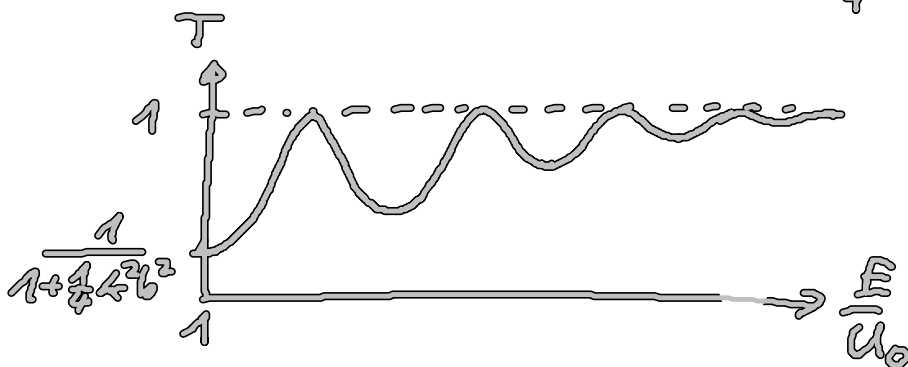
(i) "Resonanzen": $T=1$ für $Kb = n\pi \rightarrow \left(\frac{E}{U_0}\right)_n, n=1,2,\dots$

(ii) Minimum von T : für $Kb \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}, n=0,1,2,\dots$

(iii) $T\left(\frac{E}{U_0} \rightarrow 1\right)$: $\sin^2(Kb) \stackrel{K \rightarrow 0}{\approx} K^2 b^2$

$$\rightarrow T \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left| \frac{K}{k} - \frac{k}{K} \right|^2 K^2 b^2}$$

$$\rightarrow T(E=U_0) \stackrel{K=0}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} k^2 b^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{mU_0}{\hbar^2} b^2} \quad (8.23)$$



8.4. Harmonischer Oszillator

- Motivation: Klass. Mechanik
 - ... 1D harm. Oszillator (aus fühlbar)
 - harm. gekoppelte Massepunkte
 - entkoppelte Oszillatoren
 - z.B. Modalschwingungen
 - Gitterschwingung → QT: Phononen

a) Problemstellung

• EW-Problem: $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + U(x)$ (8.24)

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

... Hamiltonoperator des harm. Oszillators

• Skalierung:

typische Länge $\xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$	dimensionslose Ortskoord. $\xi = \frac{x}{\xi_0}$ (8.25)
„ Energie: $\hbar\omega_0$	

damit (8.24) → $\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right] \psi(\xi) = \varepsilon \psi(\xi)$ (8.26)

... EW-Problem ohne störende Parameter

NB: nur gebundene Zustände

→ diskretes Spektrum nicht entartet EW

• Lsg. der D.Gl. (8.26): Sommerfeldsche Polynommethode

→ Hermitesche Polynome

b) algebraische Lsg.

• Führe ein:

$$\begin{aligned} \text{" Vernichtungsoperator " } & a = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} + \gamma \right) \quad (8.27) \\ \text{" Erzeugungsoperator " } & a^\dagger = \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dx} + \gamma \right) \end{aligned}$$

adjungierte Operatr:
 $\frac{d}{dx} \rightarrow -\frac{d}{dx} !!!$

(8.26) \rightarrow $(a^\dagger a + \frac{1}{2})\psi = \varepsilon\psi$ (8.28)

Beweis: $a^\dagger a \psi(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dx} + \gamma \right) \left(\frac{d}{dx} + \gamma \right) \psi(x)$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \gamma \frac{d}{dx} - 1 + \gamma \frac{d}{dx} + \gamma^2 \right) \psi(x)$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2 - 1 \right) \psi(x) \quad \text{q.e.d. (8.29)}$

• Löse EW-Problem von:

(8.30)

$$\text{" Besetzungszahl operator " } \hat{n} = a^\dagger a : \hat{n} \psi_\nu = \nu \psi_\nu \rightarrow \varepsilon = \nu + \frac{1}{2}$$

• algebraische Struktur:

Kommutator $[A, B] = AB - BA !!$

$$\begin{aligned} \text{(i) } [a, a^\dagger] &= 1 \\ \text{(ii) } [\hat{n}, a^\dagger] &= a^\dagger \\ \text{(iii) } [\hat{n}, a] &= -a \end{aligned} \quad (8.31)$$

zu (i)
 $aa^\dagger = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} + \gamma \right) \left(-\frac{d}{dx} + \gamma \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 1 + \gamma^2 \right) \quad \text{R(8.29)}$
 (ii) $[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \quad \checkmark$

• Eigenfunktion ψ_0 ≥ 0 Grundzustand

Beweis: $\nu \langle \psi_\nu | \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | a^\dagger a | \psi_\nu \rangle = \langle a \psi_\nu | a \psi_\nu \rangle \geq 0$ (8.22)

$\rightarrow \nu \geq 0 \rightarrow$ niedrigst mögliche EW:

$\nu=0$ mit $a\psi_0=0$
und $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$

• Beh:

$\hat{H}\psi_\nu = \nu\psi_\nu \rightarrow \psi_{\nu+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} a^\dagger \psi_\nu$ mit $\hat{H}\psi_{\nu+1} = (\nu+1)\psi_{\nu+1}$
... a^\dagger erzeugt neue Eigenfkt. (EF) (8.33)

Beweis: $\hat{H} a^\dagger \psi_\nu \stackrel{(8.21)(i)}{=} (a^\dagger \hat{H} + a^\dagger) \psi_\nu = (\nu+1) a^\dagger \psi_\nu$ qed

Normierung: $\langle a^\dagger \psi_\nu | a^\dagger \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | a a^\dagger | \psi_\nu \rangle \stackrel{(8.21)(i)}{=} \langle \psi_\nu | a^\dagger a + 1 | \psi_\nu \rangle$
 $= (\nu+1) \underbrace{\langle \psi_\nu | \psi_\nu \rangle}_{=1} = \nu+1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ qed

• also: Lsg von EW-Problem (8.20)

$\hat{H}\psi_n = n\psi_n, \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \psi_0, n=0,1,2,\dots$ (8.34)

n ... Besetzungszahl des harm. Oszillators

• Lösung vollständig?

(i) Beh: $a\psi_\nu$ ist Eigenfkt. zu EW $\nu-1$ (8.35)

... a „verdrückt“ Besetzung

Beweis: $\hat{H} a \psi_\nu \stackrel{(8.21)(i)}{=} (a \hat{H} - a) \psi_\nu = (\nu-1) a \psi_\nu$ qed

(ii) Annahme: EW $\nu = n + \alpha, 0 < \alpha < 1$ existiere:

nächste Stunde!