

e) Kohärente oder quasiklassische Zustände

(Glauberzustände, Nobelpreis!)

• Def: $a \psi_\alpha = \alpha \psi_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (8.44)

→ $\psi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x)$ (8.47)

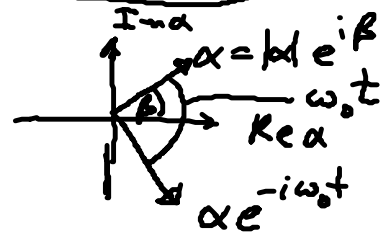
↑
EU des harm. Oszillators

• Zeitentwicklung:

$$\psi_\alpha(x,t) = e^{-i\omega_0 t/2} \psi_{\alpha(t)}(x) \quad \text{mit } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t} \quad (8.50)$$

• Energiemittelwert/-unscharfe:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \hbar \omega_0 \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) \\ \Delta E &= \hbar \omega_0 |\alpha| \\ \rightarrow \frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} &\approx \frac{1}{|\alpha|} \ll 1 \quad \text{für } |\alpha| \gg 1 \end{aligned}$$



• Heisenbergsche Unschärferelation: o.B.

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (8.53)$$

... Unschärfe für ψ_α minimalst klein!

• Zeitentwicklung von $\langle \hat{x} \rangle$:

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi_{\alpha(t)} | \hat{x} | \psi_{\alpha(t)} \rangle \stackrel{(8.47)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_{\alpha(t)} | a + a^\dagger | \psi_{\alpha(t)} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\langle \psi_{\alpha(t)} | a | \psi_{\alpha(t)} \rangle + \langle a \psi_{\alpha(t)} | \psi_{\alpha(t)} \rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(t) + \alpha^*(t)]$$

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$$

$$= |\alpha| e^{-i(\omega t - \beta)}$$

$$\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{2} \xi_0 \operatorname{Re} \alpha(t) \quad (8.54)$$

$$= \sqrt{2} \xi_0 |\alpha| \cos(\omega t - \beta)$$

$A \dots$ Amplitude
 \dots Mittelwert verhält sich wie bei klass. Oszillator
 \rightarrow kohärente Zustände können klass. Situation nahe

[vgl. 4.3 Ehrenfest'sche Theorem
 Oszillator:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle = -k \langle x \rangle]$$

Klass. Grenzfall: $|\alpha| \gg 1$

$$\langle \hat{H} \rangle \stackrel{(8.52)}{\approx} \hbar \omega_0 |\alpha|^2 = \frac{\hbar \omega_0}{2 \xi_0^2} A^2$$

(8.25) $\xi_0^2 = \frac{\hbar}{m \omega_0}$

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{m \omega_0^2}{2} A^2$$

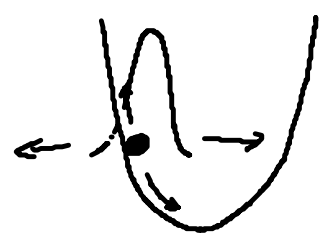
\dots klass. Wert

mit $\frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} \ll 1 !!$

Wahrscheinlichkeitsdichte: o.B. \rightarrow s. Übungen

$$|\psi_\alpha(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0} \exp\left[-\frac{(x - \langle \hat{x} \rangle)^2}{\xi_0^2}\right] \quad 8.55$$

\dots Gaußsches Wellenpaket
 Breite ξ_0 , Schwerpunkt } oszilliert wie $\langle \hat{x} \rangle !!$
 Maximum }



f) Anwendung:

- (i) Schwingung von Moleküle
 - (ii) Schwingungen des Kristallgitters $\hat{=}$ Normalschwingungen
- $\omega(\mathbf{k}, p)$ Kreisfrequenz
 ebenevektor
 Polarisation

$\hat{=}$ entkoppelte Oszillatoren: Quantisierung: $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

$a^\dagger(\omega, \underline{k}, \rho)$... erzeugt „Phonon“ der Energie $\hbar\omega$

$\hat{=}$ Teilchen der Gitterschwingung

wichtig für: Berechnung der spezif. Wärme

Kohärente Zustände \longleftrightarrow klass. Normalschwingung:

keine feste Phononenzahl

(iii) em Welle: $\omega(\underline{k}, \rho)$

Quantisierung der em Welle ($\hat{=}$ QED)

$$\rightarrow \hat{H} = \sum_{\underline{k}, \rho} \hbar\omega(\underline{k}, \rho) \left[a^\dagger(\underline{k}, \rho) a(\underline{k}, \rho) + \frac{1}{2} \right]$$

erzeugt „Photon“ der Energie $\hbar\omega(\underline{k}, \rho)$

$\hat{=}$ Teilchen der em-Welle

Energie-EU mit $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

n ... Photonenanzahl im EU

wichtig für: Hohlraumstrahlung: Plancksche Quantenhypothese

Kohärente Zustände \longleftrightarrow klass. em Welle: keine feste Photonenanzahl

\rightarrow Lasermoden

II. Der formale Rahmen der QT

9. Mathematische Grundlagen

• Motivation:

(i) Darstellung von Zuständen:

$\psi(x, t)$... Ortsraum
 $\bar{\psi}(p, t)$... Impulsraum
 $c_n(t)$... Raum der Energie-EV
⋮
[s. Kap. 5.4]

→ darstellungsunabhängiger Zustand / Zustandsvektor:

$|\psi\rangle$
... Diracscher Ket-Vektor

(3.1)

(ii) Zustände ohne Ortsraumdarstellung

Bsp: Spin $|s\rangle$ eines e^-

3.1 Hilbert-Raum der Zustandsvektoren

a) Grundlagen:

Hilbert-Raum \mathcal{H} = vollständiger Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt
= " unitärer Vektorraum

(3.2)

Erläuterung:

(i) Vektorraum: Rechnen mit $|\psi\rangle$

Vektorraumaxiome → Kopie

(ii) hermitesches Skalarprodukt: $|\psi\rangle$ ausmessen

[s. Kap. 4.1a)]

$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$... Norm von $|\psi\rangle$
 $\langle\psi|\psi\rangle = 0$... Orthogonalität

Definition: → Kopie

(iii) Vollständigkeit:

Jede Cauchy-Folge $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$ konvergiert gegen ein $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

(3.3)

Idee: $|\psi - \psi_n\rangle = |\psi\rangle - |\psi_n\rangle$

$$\langle \psi - \psi_n | \psi - \psi_n \rangle \longrightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty$$

... „Abstand“
von $|\psi_n\rangle$ “

• Satz: (o.B.) Raum L^2 der quadratintegrierbaren Funktionen ($\langle \psi | \psi \rangle < \infty$) ist Hilbertraum (9.5)

(i) $\langle \psi | \psi \rangle \stackrel{\text{Ortsraum}}{=} \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3r$

(ii) QT: zumindest stetiges $\langle \psi | \psi \rangle$ [vgl. Kap. 8]
 \longrightarrow „unser“ $\mathcal{H} \subset L^2$

• Satz: (o.B.) In jedem \mathcal{H} existiert VONS mit höchstens abzählbar unendlich vielen Vektoren (9.6)

Bsp: EV einer Observablen mit diskontinuierlichem EW-Spektrum [s. Kap. 5.3a)]

b) „erweiterter Hilbertraum“

• eigentliche Zustandsvektoren: $|\psi\rangle \in L^2$
 uneigentliche „

$|\lambda\rangle, \lambda \dots \text{kont}$
 $\langle \lambda | \lambda' \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$

(9.10)
 für VONS

Bsp: Impulseigenfkt. $|p\rangle : \langle p | p' \rangle = \delta(p - p')$ (9.11)
 Ortsdarstellung: $\psi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot \mathbf{r}}$

• erweiterter Hilbertraum = Menge der $|\psi\rangle$ und $|\lambda\rangle$ (9.12)

c) dualer Raum \mathcal{H}^* :

• lineares Funktional: $|\psi\rangle \longrightarrow \langle \psi | \psi \rangle \in \mathbb{C}$

$\mathcal{H}^* = \text{Raum der linearen Funktionale } \langle \psi |$

(9.13)

• Bezeichnung: $\langle \varphi | \varphi \rangle$
Bra (|) ket [von engl. Klammer]

Dirac
Bra-Vektoren: $\langle \varphi | \in \mathcal{H}^*$ (3.14)
Ket- " $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$

NB: $\langle a\varphi_1 + b\varphi_2 | = a^* \langle \varphi_1 | + b^* \langle \varphi_2 |$ (3.15)

vgl. Eigenschaft (4.4)
des Skalarprodukts

9.2 Operatoren und Darstellungsreihe

• i. f.: oft $A = \hat{A}$, $\hat{\quad}$... weglassen, nur bei Zweifelsfällen

a) Observable und spezielle VONS.

• Wiederholung: [s. Kap. 4.1]

(i) Operator A : $A|\varphi\rangle = |A\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ mit $|\varphi\rangle, |A\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ (3.16)

(ii) linearer Operator A : $A(a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle) = a|A\varphi_1\rangle + b|A\varphi_2\rangle$ (3.17)

(iii) adjungierter Operator: $\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \langle A^+ \varphi | \varphi \rangle$ (3.18)

Klar: $(A^+)^+ = A$ (3.19)

(iv) hermitesche Operatoren: $A^+ = A$