9.2. Operatoren und Darstellungsräume

a) Observable und spezielle VONS:

- Wiederholung:

  (i) Operator A: $A|\psi\rangle = |A\psi\rangle = |\varphi\rangle$, $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ (9.16)

  (ii) linearer Operator A: $A(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a|A\psi_1\rangle + b|A\psi_2\rangle$ (9.17)

  (iii) adjungierter Operator: $\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle A^{+}\varphi|\psi\rangle$ (9.18)

  klar: $(A^{+})^{+} = A$ (9.19)

  (iv) hermitesche Operatoren: $A^{+} = A$ (9.20)

- EW-Problem von Observablen: $A^{+} = A$

  (i) diskretes EW-Spektrum:

$$\boxed{A|\varphi_n\rangle = \underbrace{a_n}_{\text{EW}}\,\underbrace{|\varphi_n\rangle}_{\text{EV}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} a_n \in \mathbb{R} \\ \langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm} \\ \{\ldots|\varphi_n\rangle\ldots\} \text{ .. VONS in } \mathcal{H} \end{array}} \quad (9.21)$$

Bsp: $H|\varphi_n\rangle = E|\varphi_n\rangle \longrightarrow$ VONS der Energie-EV (9.22)

NB. (1) in $\mathcal{H}^*$: $\langle A\varphi_n| = \langle a_n\varphi_n| = a_n^*\langle\varphi_n|$

allg. linearer Operator

(2) Entartung von a_n : $a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+m}$

Schmidtsche Orthogonalisierung für Entartungsraum

$\longrightarrow \langle\varphi_{n+i}|\varphi_{n+j}\rangle = \delta_{ij}$, $i,j = 0,1,\ldots,m$

i.f. Entartung immer implizit mitgenommen.

(ii) kontinuierliches EW-Spektrum:

$$\boxed{A|\varphi_\lambda\rangle = a_\lambda|\varphi_\lambda\rangle \quad \text{mit} \begin{cases} a_\lambda \in \mathbb{R} \\ \langle\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta(\lambda-\lambda') \\ \{\ldots|\varphi_\lambda\rangle\ldots\} \ \ldots \text{VONS in } \mathcal{H} \end{cases}} \quad (9.24)$$

Bsp: (1) $\hat{\underline{p}}\,|\underline{p}\rangle = \underline{p}\,|\underline{p}\rangle$ ... Impuls-EV $|\underline{p}\rangle$ zu EW $\underline{p}$ (9.25)

(2) $\hat{\underline{r}}\,|\underline{r}\rangle = \underline{r}\,|\underline{r}\rangle$ ... Orts-EV $|\underline{r}\rangle$ zu EW $\underline{r}$ (9.26)

$\hat{\underline{r}} = \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$

b) Darstellung von Zustandsvektoren

= Entwicklung nach Basisvektoren eines VONS

$$\boxed{\text{Seien } \begin{matrix}\{\ldots|\varphi_n\rangle\ldots\}\\ \{\ldots|\varphi_\lambda\rangle\ldots\}\end{matrix} \ \text{VONS in } \mathcal{H} \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{cases}\sum_n c_n|\varphi_n\rangle \\ \int d\lambda\, c(\lambda)|\varphi_\lambda\rangle\end{cases} \ \text{mit} \ \begin{matrix} c_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle \\ c(\lambda) = \langle\varphi_\lambda|\psi\rangle\end{matrix}} \quad (9.27)$$

[s. Kap. 5.3]

$\left.\begin{matrix}c_n\\ c(\lambda)\end{matrix}\right\}$ stellen $|\psi\rangle$ im speziellen VONS dar!

z.B. Orts-/Impuls-/Energieraum

• Vollständigkeitsrelation:

$$|\psi\rangle = \begin{cases}\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle \\ \int d\lambda\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\psi\rangle\end{cases} \overset{!}{=} \mathbb{1}\,|\psi\rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbb{1} = \begin{cases}\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \\ \int d\lambda\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\end{cases}} \quad (9.28)$$

... Darstellung des Einheits-/Einsoperators!

Bem: (i) $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle \in \mathcal{H} \longrightarrow |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ ... Operator

(ii) vgl.: $\underline{\underline{1}} = \sum_{i=1}^{3} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ ... für Tensoren/Matrizen

- Beispiele:

(i) Impuls-EV:

$$|\psi\rangle = \int d^3p\ |p\rangle\ \bar\psi(\underline{p}) \quad \text{mit} \quad \bar\psi(\underline{p}) = \langle \underline{p}|\psi\rangle \qquad (3.29)$$

insbesondere: $\langle \underline{p}|\underline{p}'\rangle = \delta(\underline{p}-\underline{p}')$ ... „Orthonormierung"

bzw weil: $|p'\rangle = \int d^3p\ |p\rangle\ \delta(\underline{p}-\underline{p}')$ (3.31)

(ii) Orts-EV:

$$|\psi\rangle = \int d^3r\ |r\rangle\ \psi(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad \psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle$$

... Ortsdarstellung!!!

insbesondere: (1) $\langle \underline{r}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$

... „Orthonormierung"

bzw weil: $|\underline{r}'\rangle = \int d^3\underline{r}\ |\underline{r}\rangle\ \delta(\underline{r}-\underline{r}')$ (3.31)

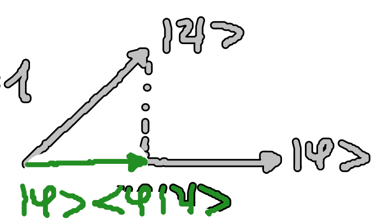
(2) $\langle \underline{r}|\underline{p}\rangle = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$

... Impuls-EV in Ortsdarstellung

jetzt: spezielle lineare Operatoren in c)/d)

c) <u>Projektoren:</u>

- Betrachte Zustand: $|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$ mit $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$



Führe ein: Projektion von $|\psi\rangle$ auf φ $|\psi\rangle$

$$\boxed{P_\varphi|\psi\rangle \quad \text{mit Projektor} \quad P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|,\ \langle\varphi|\varphi\rangle = 1} \qquad (3.33)$$

NB: $P_\varphi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ ... Tensorprodukt von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}^*$

• Eigenschaften:

(i) $\boxed{P_\varphi^2 = P_\varphi}$ (9.34)

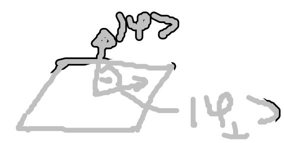
$|\varphi\rangle\underbrace{\langle\varphi|\varphi\rangle}_{=1}\langle\varphi|$

(ii) $\boxed{P_\varphi = P_\varphi^+}$

Beweis: $\langle\psi_1|P_\varphi|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi_2\rangle$

$= \langle\psi_2|\varphi\rangle^*\langle\varphi|\psi_1\rangle^* = \langle\psi_2|P_\varphi|\psi_1\rangle^*$

$= \langle P_\varphi\psi_1|\psi_2\rangle$ qed



(iii) EW-Problem

$$\boxed{\begin{aligned} P_\varphi|\varphi\rangle &= |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle = |\varphi\rangle\,! \\ P_\varphi|\varphi_\perp\rangle &= |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi_\perp\rangle = 0 \end{aligned}}$$ (9.36)

... EW 0 zu jedem $|\varphi_\perp\rangle$

NB: (i), (ii) .. charakterisieren Projektoren!

• Verallgemeinerung:

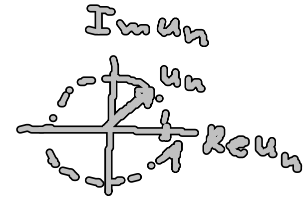
(i) $P = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

... Projektor auf Raum aufgespannt durch $\{|\varphi_1\rangle \dots |\varphi_n\rangle\}$

$P = 1$, falls $\{\dots|\varphi_i\rangle\dots\} =$ VONS [s. Gl. (9.28)]

(ii) schiefe Projektoren $P_{ij} = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|$ (9.38)

d) <u>unitäre Operatoren:</u>



• Def.: $\boxed{U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \longleftrightarrow U^\dagger = U^{-1}}$ (9.39)

• EW-Problem: o.B.

$$\boxed{U|\psi_n\rangle = u_n|\psi\rangle \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u_n u_n^* = |u_n|^2 = 1! \\ \langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm} \end{array}} \qquad (9.40)$$

• Satz:

$$\boxed{A = A^\dagger \longrightarrow U = e^{iA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \quad \ldots \text{unitär}} \qquad (9.41)$$

Bew: $U^\dagger = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA} = U^{-1}$ qed

$\langle\psi|i|\varphi\rangle$
$= \langle -i\psi|\varphi\rangle$
$= i\langle\psi|\varphi\rangle$!

(9.42)

EW-Problem: $\boxed{A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle \longrightarrow U|\varphi_n\rangle = e^{ia_n}|\varphi_n\rangle}$

verwende: $A^m|\varphi_n\rangle = a_n^m|\varphi_n\rangle$

$$U|\varphi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!}|\varphi_n\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia_n)^n}{n!}|\varphi_n\rangle = e^{ia_n}|\varphi_n\rangle$$

Bsp: Translationsoperator: $T_{\underline{\xi}}$

Ortsraum: $\langle \underline{r}|T_{\underline{\xi}}|\psi\rangle \overset{!}{=} \psi(\underline{r} - \underline{\xi})$

$$\longrightarrow \boxed{T_{\underline{\xi}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\xi}\cdot\hat{\underline{p}}}} \qquad (9.43)$$

• unitäre Transformation:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} |\bar{\psi}\rangle = U|\psi\rangle \\ \bar{A} = UAU^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{lassen invariant} \\ \text{(i) } \langle\psi|\psi\rangle = \langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle \\ \text{(ii) EW } a_n \text{ von } A, \bar{A} \\ \text{(iii) Erwartungswerte} \\ \quad \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\bar{\psi}|\bar{A}|\bar{\psi}\rangle \end{array}} \qquad (9.44)$$

... Physik bleibt gleich!

Bsp: Translation des ges. Systems

Bew: Übungen

insbesondere: $\langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle = \langle U\psi|U\psi\rangle = \langle U^+U\psi|\psi\rangle$

$= \langle\psi|\psi\rangle$ ... „Rotation" von $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}$!

(9.45)

e) <u>Darstellung von Operatoren:</u>

• mit VONS $\{|\varphi_1\rangle \ldots |\varphi_n\rangle \ldots\}$ und $1 = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$

(i) Entwicklung eines Operators A:

$$A = 1\,A\,1 = \sum_{n,m} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|A|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$$

$$\boxed{A = \sum_{n,m} A_{nm} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_m| \quad \text{mit } A_{nm} = \langle\varphi_n|A|\varphi_m\rangle} \qquad (9.45)$$

... Matrix! stellt A in VONS dar

(ii) Wirkung von Operator A: $A|\psi\rangle = |\chi\rangle$

Darstellung in VONS: $\langle\varphi_n|A\underset{\uparrow\atop 1}{|}\psi\rangle = \langle\varphi_n|\chi\rangle$

$$\longrightarrow \sum_m \underbrace{\langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle}_{A_{nm}} \underbrace{\langle \varphi_m | \psi \rangle}_{c_m} = \underbrace{\langle \varphi_n | \chi \rangle}_{b_n}$$

$$A|\psi\rangle = |\chi\rangle \longrightarrow \boxed{\sum_m A_{nm} c_m = b_n} \quad (8.46)$$

also: rechne mit Matrizen und Spalten-Vektoren