13.4. Pauli-Spinoren & Pauli-Gleichung

a) „Der Spin wirkt im Raum $R_{1/2}$":

- Spinzustände

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\tfrac{1}{2}\ +\tfrac{1}{2}\right\rangle &= |+\rangle = |\uparrow\rangle \\ \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle &= |-\rangle = |\downarrow\rangle \end{aligned} \Bigg\} \text{ VONS in } R_{1/2} \quad \begin{aligned} \langle \pm | \pm \rangle &= 1 \\ \langle + | - \rangle &= 0 \end{aligned}} \quad (13.17)$$

$j = \frac{1}{2}$ Spinquantenzahl

magn. Quantenzahl

$$\boxed{\begin{aligned} S^2 |\pm\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |\pm\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2 |\pm\rangle \\ S_z |\pm\rangle &= m_s \hbar\, |\pm\rangle = \pm \tfrac{1}{2}\hbar\, |\pm\rangle \end{aligned}} \quad (13.18)$$

$$S_\pm = S_x \pm i S_y \qquad (13.19)$$

Kommutatoren (11.21) – (11.24)

allgemeiner Zustand : $|\eta\rangle = \alpha_+ |+\rangle + \alpha_- |-\rangle$

i) $$\boxed{\eta = \begin{pmatrix} \langle + | \eta \rangle \\ \langle - | \eta \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}} \quad (13.21)$$

insbesondere: $$\boxed{\begin{aligned} |+\rangle &\to \eta_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |-\rangle &\to \eta_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (13.22)$$

Pauli-Spinor

ii) Spinoperatoren : (11.3)

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i \quad \text{mit } \sigma_i = \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_i | + \rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

σ_i : Paulische Spinmatrizen

iii)
$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z \eta_+ &= \eta_+ , & \sigma_x \eta_+ &= \eta_- \\
\sigma_+ \eta_+ &= 0 , & \sigma_y \eta_+ &= i\eta_- \\
\sigma_- \eta_+ &= 2\eta_- , & \sigma_z \eta_- &= -\eta_- \\
\sigma_+ \eta_- &= 2\eta_+ , & \sigma_- \eta_- &= 0 \\
\sigma_x \eta_- &= \eta_+ , & \sigma_y \eta_- &= -i\eta_+
\end{aligned}\right\} \quad (13.24)$$

iv) Relationen der σ_i:

(1) s. Gl. (11.37)

(2) $Sp\, \sigma_i = 0$ (13.25)

(3) $\det \sigma_i = -1$ (13.26)

(4) $(\underline{\sigma}\cdot\underline{a})(\underline{\sigma}\cdot\underline{b}) = \underline{a}\cdot\underline{b}\,\mathbb{1} + i\underline{\sigma}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})$ (13.27)

$i = 1 \dots 3$

b) Produktraum $\mathcal{H} \otimes R_{1/2}$

$\hat{=}$ Raum der Spinorwellenfunktionen:

$$|\chi\rangle = |\psi\rangle|\eta\rangle$$

mit $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ und $|\eta\rangle \in R_{1/2}$

Skalarprodukt: $\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle$

diskretes VONS:

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} \{ \ldots | \varphi_n \rangle \ldots \} & \text{VONS in } \mathcal{H} \\ \{ |+\rangle, |-\rangle \} & \text{VONS in } \mathbb{C}_{1/2} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \{ \ldots | \varphi_n \rangle |+\rangle \ldots \} \\ = \{ \ldots | \varphi_n + \rangle, | \varphi_n - \rangle \} \end{array}}$$

(13.30) VONS in $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}_{1/2}$

mit (1) Orthonormalität:

$$\langle \varphi_n \varepsilon | \varphi_m \varepsilon' \rangle = \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle \langle \varepsilon | \varepsilon' \rangle$$
$$= \delta_{nm} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \quad (13.31)$$

2 Entwicklungssatz:

$$|\chi\rangle = \sum_n \sum_{\varepsilon \pm} c_n(\varepsilon) | \varphi_n \varepsilon \rangle \quad (13.32)$$

mit $c_n(\varepsilon) = \langle \varphi_n \varepsilon | \chi \rangle$

Darstellung als Spinor im Ortsraum

$$\boxed{\begin{aligned} |\chi\rangle &= \int d^3r \left(\Psi_+(\underline{r}) \, |\underline{r}+\rangle + \Psi_-(\underline{r}) \, |\underline{r}-\rangle \right) \\ \text{mit} \quad \Psi_{\pm}(\underline{r}) &= \langle \underline{r} \pm | \chi \rangle \qquad (13.33) \\ \rightarrow \text{allg. Pauli-Spinor: } \underline{\chi} &= \begin{pmatrix} \Psi_+(\underline{r}) \\ \Psi_-(\underline{r}) \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

c) Pauli-Gleichung:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\chi\rangle = H|\chi\rangle = (H_0 + H_1 + H_{SB}) |\chi\rangle} \qquad (13.35)$$

mit Pauli-Spinor:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_+(\underline{r}) \\ \Psi_-(\underline{r}) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \Psi_+(\underline{r}) \\ \Psi_-(\underline{r}) \end{pmatrix}} \qquad (13.36)$$

13.5 Rabi-Gleichung

Motivation: i) Spinmanipulation mit B-Feld

ii) Modell-System für 2-Niveau-Systeme

Situation: e^- - Spin in zeitabhän. Magnetfeld $\underline{B}(t)$
& kein Bahndrehimpuls $l = 0$

(13.16) $$\boxed{H = H_0 + H_1 \text{ mit } H_0 = \frac{p^2}{2m} - e\varphi(x) \quad H_1(t) = \frac{e}{m}\underline{B}(t) \cdot \underline{S}}$$ (13.37)

$|\chi\rangle = |\psi\rangle |\eta\rangle$ einsetzen

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\chi\rangle = i\hbar\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)|\eta\rangle + i\hbar|\psi\rangle\left(\frac{d}{dt}|\eta\rangle\right)$$
$$= \left(H_0|\psi\rangle\right)|\eta\rangle + |\psi\rangle H_1|\eta\rangle$$

$\xrightarrow{\text{Entkopplung}}$: $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H_0|\psi\rangle$

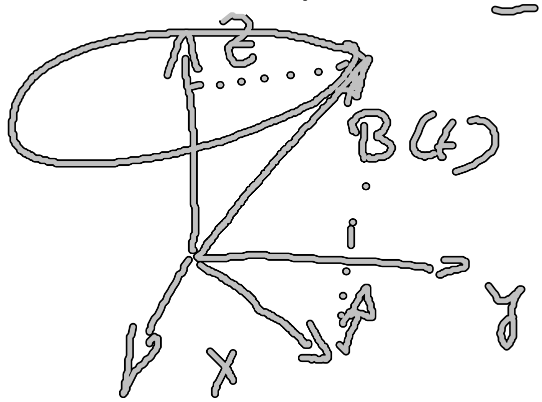
(13.38) $$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|\eta\rangle = H_1(t)|\eta\rangle}$$

Rabi-Gl.

Methode der magn. Resonanz:

= B-Feld induziert Spinumklappen

i) $\underline{B}(t) = B_0\, \underline{e}_z + \underline{B}_1(t)$, $\underline{B}_1(t) = B_1[\cos(\omega t)\, \underline{e}_x + \sin(\omega t)\, \underline{e}_y]$



ii) $$H_1(t) = \frac{e}{m}\underline{B}\cdot\underline{S} = \omega_0 S_3 + \omega_1(\cos(\omega t) S_1 + \sin(\omega t) S_2) \quad (13.39)$$

$$\omega_0 = \frac{e B_0}{m}$$

$$\omega_1 = \frac{e B_1}{m}$$

iii) Darstellung bz. $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $\underline{S} = \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}$ (13.23)

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{} \quad H_1(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (13.40)$$

iv) Rabi-Gleichung: $|\psi\rangle\ \alpha_+(t)|+\rangle + \alpha_-(t)|-\rangle$

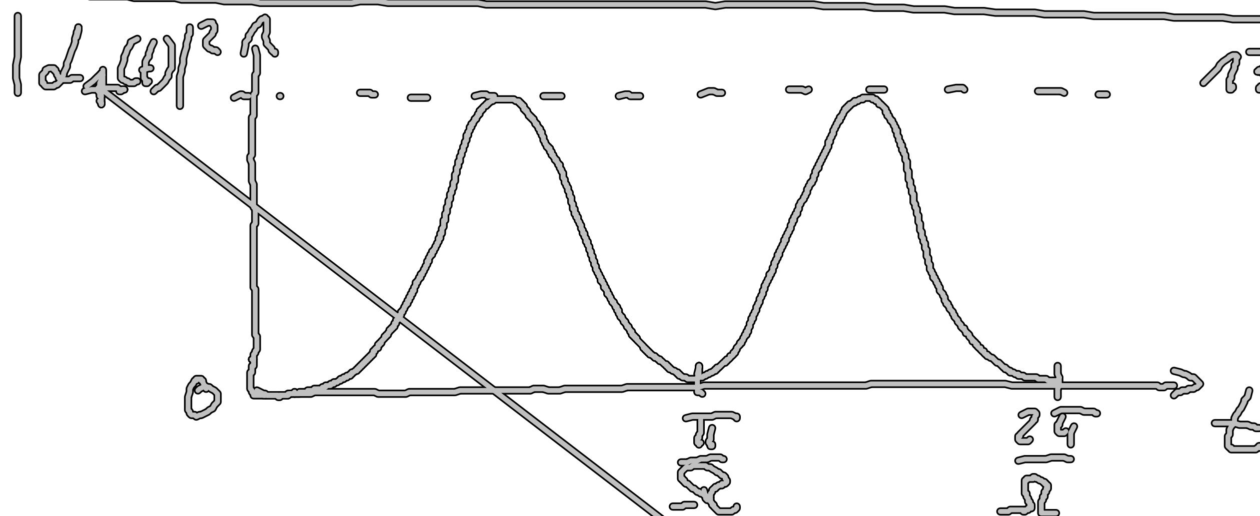
$$i\hbar \begin{pmatrix} \alpha_+(t) \\ \alpha_-(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix}}_{\Delta\omega = \omega - \omega_0} \begin{pmatrix} \beta_+(t) \\ \beta_-(t) \end{pmatrix} \quad (13.42)$$

$\tilde{H}$ ... zeitunabh.

4 Energie-EW'e von $\tilde{H}$: $\tilde{E}_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{(\Delta\omega)^2+\omega_1^2}$

(vi) Wahrscheinlichkeit, z.Z. t den Zustand $|+\rangle$ vorzufinden, wenn bei $t=0$ $|-\rangle$ vorlag? also $|\alpha_+(t)|^2$

$$\boxed{|\alpha_+(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+(\Delta\omega)^2}\sin^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\omega)^2+\omega_1^2}\,t\right]}$$



$\Delta\omega = 0$, Resonanz

$\alpha_+ = 1$ für $\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\Omega}$