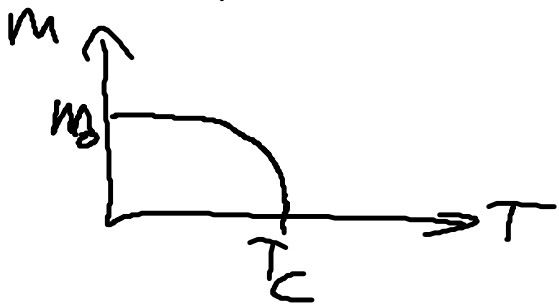


Phasenübergänge 2. Ordnung



Temperaturabhängigkeit

OP verhält sich stetig, Suszeptibilität divergiert
 \Rightarrow "Kritisches Phänomen"

$$\epsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

$\beta \leftarrow$ krit. Exponent

OP: $m \sim (-\epsilon)$

Suszeptibilität $\chi \sim (+\epsilon)^{-\gamma}$

Korrelationslänge $\xi \sim \epsilon^{-\nu}$ (siehe z.B. Ourskin-Zemile Theorie)

Korrelationslänge:

Ourskin-Zemile Theorie $\frac{1}{5}$

$$h(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r} \quad \begin{matrix} (d=3) \\ \eta=0 \end{matrix}$$

totale Korrelationsfunktion

\sim Dichte-Dichte-Korrelationsfkt.

$$\langle \rho(\underline{r}) \rho(\underline{r}') \rangle = \rho^2$$

allgemeine Form für die Korrelationsfunktion

$$h(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} e^{-\frac{r}{\xi}}$$

; d : Raumdimension

Exponent η mit $\eta \approx 0.03$ in $d=3$
↳ mit Abweichung vom klassischen Ornstein-Zernike-Verhalten!

im Prinzip ist η (wie auch ξ)
messbar durch Streuexperimente!

$$S(q) = 1 + \int h(q)$$

Strukturfaktor

es stellt sich aber heraus, dass man die
Abweichung vom OZ-Verhalten nur schwer sieht!

↳ liefert sehr gute Beschreibung
für Temperaturen nicht zu dicht an T_c

Kritische Epochen

van-der-Waals-Gleichung nicht ganz richtig!

genauer:

Weiß'sche Theorie des Ferromagnetismus

Molekularfeldtheorien (MF)

Universalitätshypothese (R.B. Griffiths, 1970)

Details des betrachteten physikalischen Systems (d.h. der mikroskopischen Wechselwirkung) werden unwichtig, wenn man dicht genug am krit. Punkt ist!

Grund:

In der Nähe von T_c werden Korrelationen
langreichweitig! \Rightarrow Nur noch
Verhalten auf großen Längenskalen relevant!

⇒ Krit. Exponenten hängen nun noch von sehr wenigen Faktoren ab:

- Raumdimension (d)
- Dimension des Ordnungsparameters (n)
"Spin-Dimension"

z.B. Kondensat : OP ρ : $\Leftrightarrow n=1$
Ferro magnet m : $\Leftrightarrow n=1$
(Ising)
 m : $\Leftrightarrow n=3$

- Reichweite der Wechselwirkung

"kurzreichweitige" System

Verhalten sich anders als Systeme mit langreichweitiger, elektrostatischer Wechselwirkung!

Z.B.

Lennard-Jones Wechselwirkung:

$$(U(r) \sim \frac{1}{r}, U(r) \sim \frac{1}{r^3})$$

Coulomb

Dipol-Dipol

Wert von krit. Exponent

Z.B. $m \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^\beta$

Ordnungsparameter

MF-Theorien:

$$\beta = \frac{1}{2}$$

Ising-Magnet ($n=1$)

$d=2: \beta \approx 0.125$

$d=3: \beta \approx 0.325$

Heisenberg-Magnet ($n=3$)

$d=3: \beta \approx 0.365$

aus Computersimulationen
Renormierungsgruppen Theorie

Konsequenz der Unversalilität:

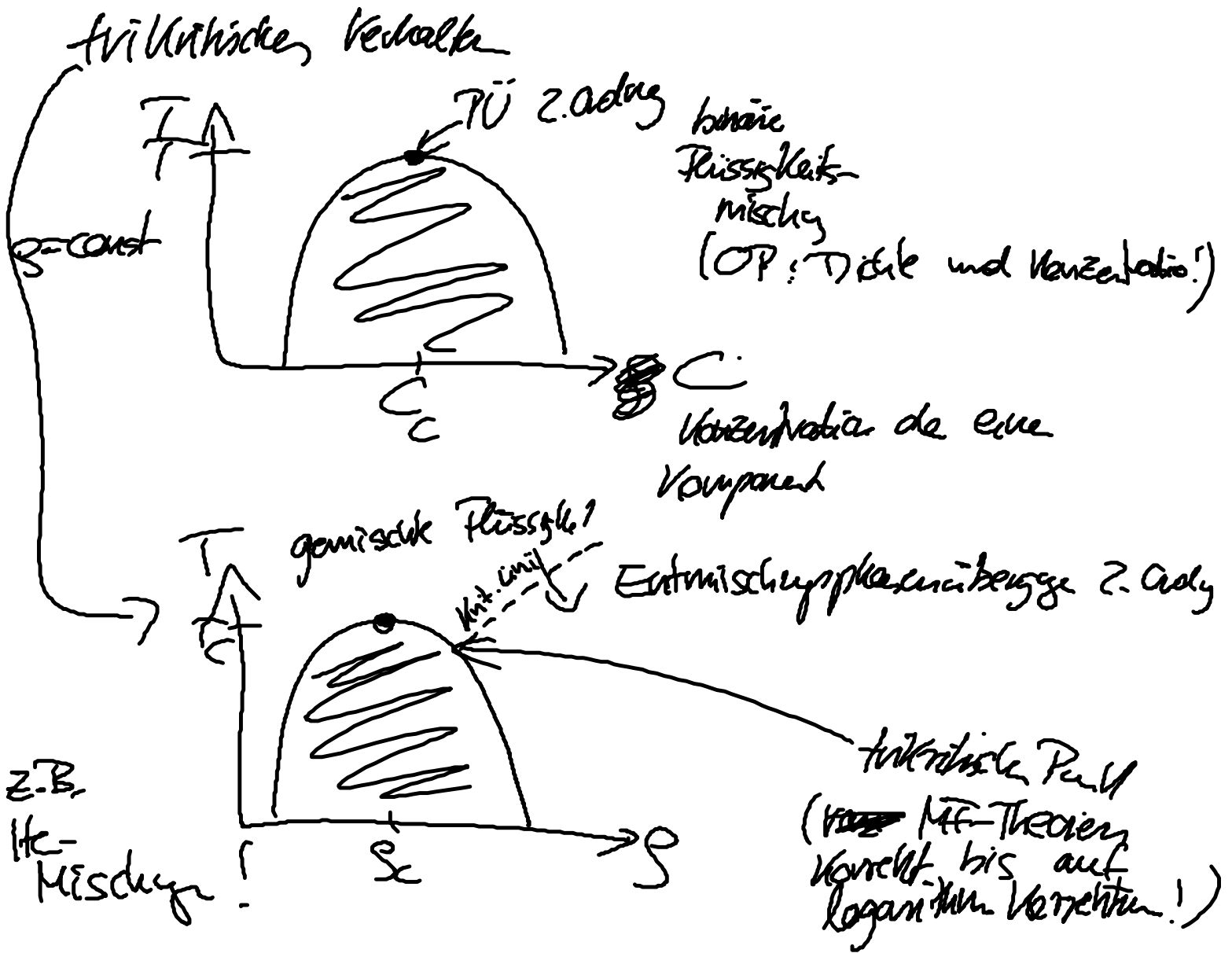
Kondensierende Flüssigkeiten (OP: $\Delta\rho$),

entmischende mehrkomponentige Flüssigkeiten,
(OP: Δc)

Konzentrationsdifferenz

und der Ising-ferromagnet in $d=3$ sind alle
in derselben "Universalitätsklasse"

→ sie sind durch dieselben Exponenten
gekennzeichnet!



III. Spinsysteme

III.1. Theorie nicht-wechselwirkender Spins (Theorie der Paramagnete)

Betrachte Teilchen mit permanentem magnet. Moment μ_i

festkörperlösung
aus

quantenmechanisch:

$$\mu_i \rightarrow \hat{\mu}_i \text{ (Operator)}$$

beachte: $\hat{\mu}_i = -\frac{g}{\hbar} \mu_B \hat{J}_i$

Landé-Faktor \nearrow \hat{J}_i \leftarrow Drehimpulsoperator
Bohr'sches Magneton \nwarrow

Zustandssumme?

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i \cdot \underline{B}_0 = \frac{g}{\hbar} \mu_B \sum_{i=1}^N \hat{J}_{i,z} B_0$$

↑
äußeres
Magnetfeld

Kanonische Zustandssumme

$$Z_N = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

↑
Spur

Spur ist unabhängig von der Wahl der quantenmechan. Zustände!
(man kann "bequeme" Darstellung benutzen)

nehme: $\underline{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ Einheitsvektor in z-Richtung

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{g}{\hbar} \mu_B \sum_{i=1}^N \hat{J}_{i,z} B_0$$

benutze
 $\hat{J}_{i,z} |j, m\rangle = \hbar m_i |j, m_i\rangle$
mit $m_i = -j, \dots, j$

Eigenwert

$$\Rightarrow Z_N = \sum_{m_1=-j}^j \sum_{m_2=-j}^j \dots \sum_{m_N=-j}^j$$

$$\rightarrow \frac{g}{\hbar} \mu_B B_0 \sum_{i=1}^N m_i$$

$\times e$

$$\tilde{\beta}_0 = g \mu_B B_0$$

$$Z_N = \prod_{i=1}^N \left(\sum_{m=-J}^J e^{-\tilde{\beta}_0 m} \right) \quad \text{Faktorisiere!}$$

$$= \left(\sum_{m=-J}^J e^{-\tilde{\beta}_0 m} \right)^N$$

$$= \left(e^{\tilde{\beta}_0 J} + e^{\tilde{\beta}_0 (J-1)} + \dots + e^{-\tilde{\beta}_0 J} \right)^N$$

$$Z_N = \left(e^{-\tilde{\beta}_0 J} \left(e^{2\tilde{\beta}_0 J} + e^{\tilde{\beta}_0 (2J-1)} + \dots + 1 \right) \right)^N$$

$$= \left(e^{-\tilde{\beta}_0 J} \sum_{k=0}^{2J} e^{\tilde{\beta}_0 k} \right)^N$$

geometr. Reihe: $\sum_{k=0}^n a_0 q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

mit $q = e^{\tilde{\beta}_0}$ hier

$$Z_N = \left(e^{-\tilde{\beta}_0 J} \left(\frac{1 - e^{\tilde{\beta}_0 (2J+1)}}{1 - e^{\tilde{\beta}_0}} \right) \right)^N$$

$$= \dots = \frac{e^{-\tilde{\beta}_0 (J+\frac{1}{2})} - e^{\tilde{\beta}_0 (J+\frac{1}{2})}}{e^{-\tilde{\beta}_0/2} - e^{\tilde{\beta}_0/2}}$$

$$Z_N = \left(\frac{\sinh(\beta \hat{B}_0 (J + \frac{1}{2}))}{\sinh \beta \hat{B}_0 / 2} \right)^N$$

Formulierende Magnetisierung des Paramagnets

Gesamt-Magnetisierung

$$\underline{M}(T, \hat{B}_0) = \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i \right\rangle \leftarrow \begin{array}{l} \text{Kanon.} \\ \text{Mittelwert} \end{array}$$

$$\left(\text{beachte} \right) \quad \langle \dots \rangle = \frac{\text{Tr} \dots e^{-\beta \hat{H}}}{Z_N}$$

mit $\underline{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$

\underline{M} hat nur z-Komponente!

$$\begin{aligned} M_z(T, \hat{B}_0) &= \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_{i,z} \right\rangle \\ &= -g \mu_B \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{\hbar} \hat{J}_{i,z} \right\rangle \end{aligned}$$

berdasarkan

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \frac{J_{iz}}{\hbar} \right\rangle = \frac{1}{Z_N} \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^N \frac{J_{iz}}{\hbar} \right) e^{-\beta H}$$

bauten Eigenzustand
 $-\beta \sum_{i=1}^N m_i$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{m_1=-J}^J \dots \sum_{m_N=-J}^J \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) e^{-\beta H}$$

$$= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B_0} \ln Z_N$$

Damit

$$M_z(T, \tilde{B}_0) = \frac{g\mu_B}{\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{B}_0} \ln Z_N$$

$$= \frac{g\mu_B}{\beta} N \frac{\partial}{\partial \tilde{B}_0} \left(\ln \left(\frac{\sinh(\beta \tilde{B}_0 (J + \frac{1}{2}))}{\sinh(\beta \tilde{B}_0 / 2)} \right) \right)$$

Ergebnis

$$M_z(T, \tilde{B}_0) = N g\mu_B \left(\coth(\beta \tilde{B}_0 (J + \frac{1}{2})) \cdot (J + \frac{1}{2}) - \coth(\beta \tilde{B}_0 / 2) \cdot \frac{1}{2} \right)$$

Definiere die sogenannte Brillouin-Funktion

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$

⇒ Magnetisierung:

$$M_z(T, \hat{B}_0) = N g \mu_B J$$

extensiv!

$$B_y \left(\underbrace{N g \mu_B J B_0}_x \right)$$

