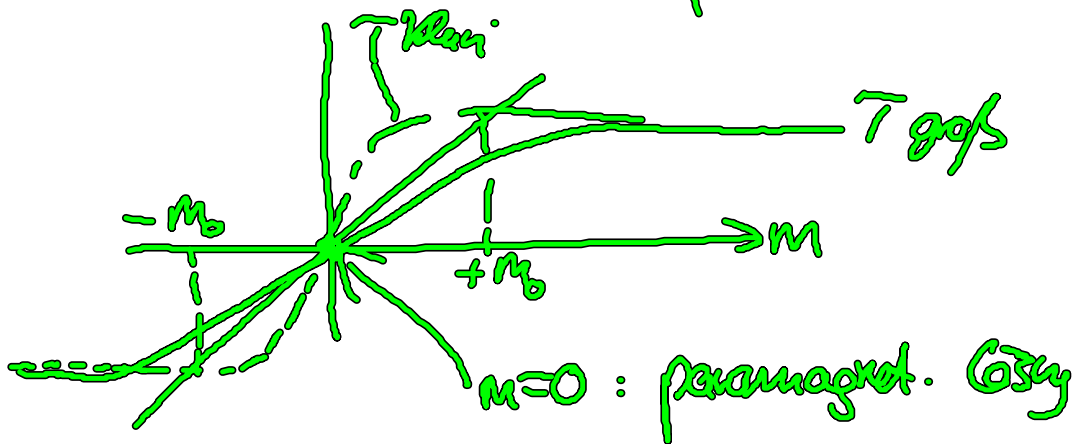


betrachte Modell mit homogener Kopplung
(∞ Zickzack)

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{J}{N} S_i S_j$$

\Rightarrow Magnetisierung $m = \langle S_i \rangle = \langle S \rangle$
 $= \tanh(\beta J m)$

Selbstkonsistenzgleichung



Zerlegung von T_C

\Rightarrow entwickle die Selbstkonsistenzgleichung für kleine m

benutze $\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - O(x^7)$

$$\Rightarrow m = \beta J m - \frac{1}{3} (\beta J m)^3 + \frac{2}{15} (\beta J m)^5$$

dividiere durch m

(man sieht auch: Die paramagnet. Lösung $m=0$ ist immer Lösung!

$$\Rightarrow 1 = \beta J - \frac{4}{3} (\beta J)^3 m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 3 (\beta J)^{-3} (\beta J - 1)$$

definieren:

$$\beta_c J = 1 \Leftrightarrow \frac{J}{k_B T_c} = 1$$

$$\Leftrightarrow T_c = \frac{J}{k_B} \quad | \cdot \beta$$

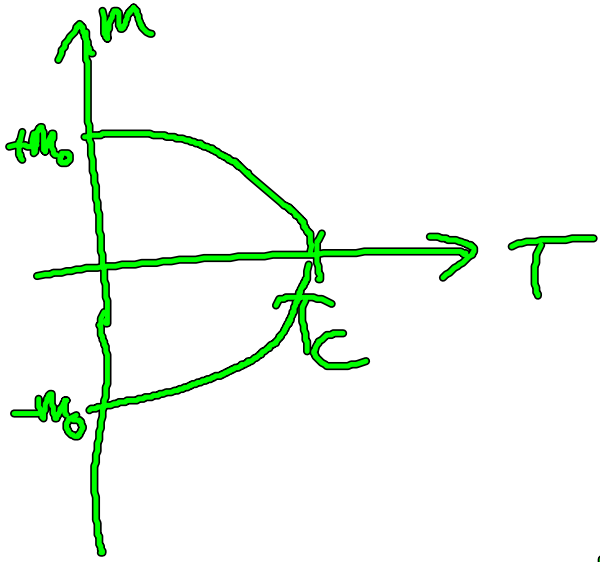
$$\beta J = \frac{T_c}{T} \quad \text{einsetzen in die Entwicklung.}$$

$$m^2 = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right) = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{T_c - T}{T}$$

$$= 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)$$

spontane Magnetisierung für $T < T_c$

$$m_0 = \pm \sqrt{3} (\beta J)^{-1} \sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$$

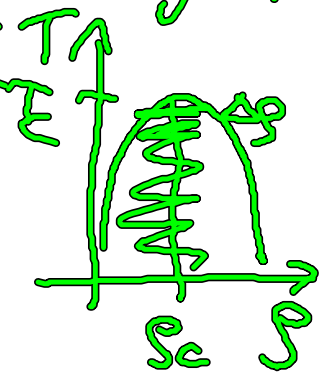


$$m_0 \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta$$

mit $\beta = \frac{1}{2}$

wie beim
Van-der-
Waals-Gas!

nicht übersehbar,
da in jedem Fall
Moseleyfeld-Theorie!



Stabilität der Lösung?
hier: anhand Berechnung der freien Energie
zurück zum Variationskalkül

$$F \leq \Phi \leftarrow \text{optimales Variationskalkül}$$

$$= \langle H - H_0 \rangle_0 + F_0$$

$$= \dots = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \langle \xi_i \xi_j \rangle_0 - \sum_i \langle \xi_i \rangle_0 h_i$$

$-\frac{1}{2} T \sum_{ij} h_i h_j$

optimal: $\tilde{h}_i = - \sum_j J_{ij} \langle s_j \rangle = +Jm$ $H_0 = \sum_i s_i h_i$

spezialisiere auf ein Ising-artiges Modell

$J_{ij} = \frac{J}{N}$, $\langle s_i \rangle = m$ (Transversalfeld)

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{J}{N} m^2 - \sum_i m(-Jm) - k_B T \sum_{i=1}^N \ln Z_0$$

$$\frac{\beta \tilde{\Phi}}{N} = -\frac{1}{2} \beta J m^2 + \beta J m^2 - \ln Z_0 \quad \text{mit } Z_0 = \sum_{s_i = \pm 1} e^{-\beta J m s_i} = 2 \cosh(\beta J m)$$

⇒ Abschätzung der freien Energie (MF)

$$\beta f^{MF} = \frac{\beta \tilde{\Phi}}{N} = +\frac{1}{2} \beta J m^2$$

Freie Energie pro Teilchen

$$- \ln 2 \cosh(\beta J m)$$

entwickle βf^{MF} für kleine m

benutze $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$$\beta f^{MF} = \frac{\beta J}{2} m^2 - \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{1}{2} (\beta J m)^2 + \dots \right)$$

$$\approx \frac{\beta J}{2} m^2 - \ln 2 - \frac{(\beta J m)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} (\beta J m)^4 - \dots$$

$$\beta f^{\text{MF}} \approx \frac{1}{2} m^2 (\beta J - (\beta J)^2) + \frac{1}{8} (\beta J)^4 m^4 - \ln 2$$

Entwicklung gilt nur für kleine m , d.h. dicht am krit. Punkt!

$$\beta J = \frac{T_c}{T}$$

$$\beta f^{\text{MF}} = \frac{m^2}{2} \underbrace{\frac{T_c}{T} \left(1 - \frac{T_c}{T}\right)}_{\left(\frac{T_c}{T}\right) \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)} + \frac{1}{8} (\beta J)^4 m^4 - \ln 2$$

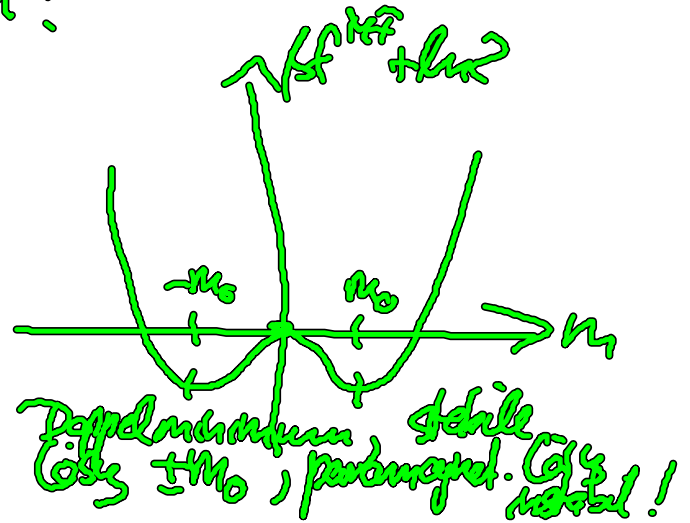
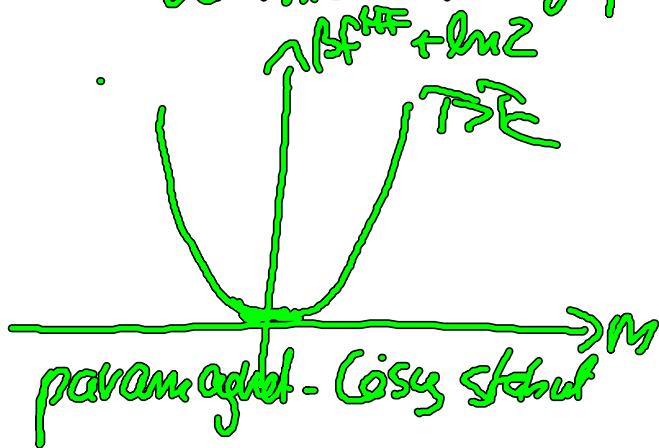
$T_c m \sim m^2$ wechselt bei $T = T_c$ sein Vorzeichen!

man setzt auf $m=0$

$$m=0 \Rightarrow \beta f^{\text{MF}} = -\ln 2 \quad \text{unabhängig von } T$$

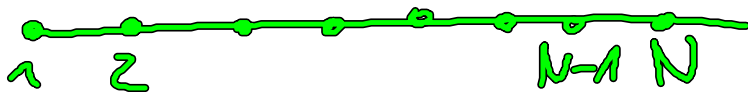
für $T < T_C$ wird der erste Term ($\sim m^2$) negativ!

aber: da Term $\sim m^4$ bleibt positiv und dominiert für große m !



II.6: Ising-Modell:
Exakte Lösung in 1 Dimension:

1-dimensionales Gitter: "Kette"
 mit N Plätzen



geschlossene (sig-Kette)
 \Leftrightarrow lang Kette mit periodische Randbedingung

$$S_{N+1} = S_1$$

Vorteil: alle Plätze sind äquivalent (Translation-Invarianz)

$$\Rightarrow \langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = \dots = \langle S_N \rangle = m$$

(dagegen 'offene Kette':

Randeffekt \rightarrow Brechung der
 Translationssymmetrie!

Kanonische Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\{S\}} e^{-H} \quad \text{mit} \quad H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - h \sum_{i=1}^N S_i$$

$$= \sum_{\{S\}} e^{J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} + h \sum_{i=1}^N S_i}$$

$$= \sum_{\{S\}} e^{J S_1 S_2 + h S_1 + J S_2 S_3 + h S_2 + \dots + J S_N S_1 + h S_N}$$

habe ein

$$\tilde{V}(s_\alpha, s_\beta) = e^{\beta J s_\alpha s_\beta + \frac{h}{2} (s_\alpha + s_\beta)}$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, N, \quad \tilde{V}(s_\alpha, s_\beta) = \tilde{V}(s_\beta, s_\alpha)$$

Zustandssumme:

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \tilde{V}(s_1, s_2) \tilde{V}(s_2, s_3) \dots \tilde{V}(s_{N-1}, s_N) \tilde{V}(s_N, s_1)$$

beachte $s_\alpha = \pm 1, s_\beta = \pm 1 \Rightarrow \tilde{V}$ kann \notin stark
annahme!

$$\Rightarrow \text{habe ein } \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} \tilde{V}(1,1) & \tilde{V}(1,-1) \\ \tilde{V}(-1,1) & \tilde{V}(-1,-1) \end{pmatrix}$$

Transfer-Matrix

Dann kann man schreiben.

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \sum_{\{s\}} \hat{V}(s_1, s_2) \dots \hat{V}(s_N, s_1) \\
 &= \sum_{s_1 = \pm 1} \underbrace{\sum_{s_2 = \pm 1} \dots \sum_{s_N = \pm 1} \hat{V}(s_1, s_2) \dots \hat{V}(s_N, s_1)}_{V^N} \\
 &= \text{Tr } \underline{V}^N
 \end{aligned}$$

Zeige das am Fall $N=2$

$$\sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} \hat{V}(s_1, s_2) \hat{V}(s_2, s_1)$$

$$\hat{V}(s_1, s_2) = e^{\beta J s_1 s_2 + \frac{\beta h}{2} (s_1 + s_2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{s_1} \sum_{s_2} \hat{V}(s_1, s_2) \hat{V}(s_2, s_1) = Z_N^{N=2}$$

$$= \underbrace{e^{\beta J + \beta h} e^{\beta J + \beta h}}_{\text{Term 1}} + \underbrace{e^{\beta J - \beta h} e^{\beta J - \beta h}}_{\text{Term 2}}$$

$$s_1 = s_2 = 1$$

$$s_1 = s_2 = -1$$

$$+ e^{-\beta J + \frac{1}{2}h(t+1)} e^{-\beta J + \frac{1}{2}h(t+1)}$$

$$+ e^{-\beta J + \frac{1}{2}h(-t+1)} e^{-\beta J + \frac{1}{2}h(-t+1)}$$

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = -1$$

$$= (e^{\beta J + \beta h})^2 + (e^{\beta J - \beta h})^2 + 2(e^{-\beta J})^2 \quad \textcircled{1}$$

andererseits

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}(1,1) & \hat{V}(1,-1) \\ \hat{V}(-1,1) & \hat{V}(-1,-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\beta J + h} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - h} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{V}^2 = \frac{\begin{pmatrix} (e^{\beta J + h})^2 & (e^{-\beta J})^2 \\ e^{-\beta J} e^{\beta J + h} & e^{\beta J - h} e^{-\beta J} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{-\beta J} e^{\beta J + h} & e^{\beta J - h} e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} e^{\beta J + h} & e^{\beta J - h} e^{-\beta J} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \text{Tr } \underline{V}^2 = (e^{\beta J + h})^2 + (e^{\beta J - h})^2 + 2(e^{-\beta J})^2$$

$$= \textcircled{1}$$

⇒ das heißt

$$Z_N = T_V \underline{\underline{V}}^N \quad \# \text{ nicht!}$$

Multiplikation mit $\underline{\underline{V}}$ \Leftrightarrow Summation
über die Konfigurationen
eines Spins!

⇒ Transfer-Matrix!

Free Energy

$$F = -k_B T \ln Z_N$$

Trick: Diagonalisiere die Matrix: $\underline{\underline{V}}$
d.h. $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{-1}$

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{x}}_1 = \lambda_1 \underline{\underline{x}}_1$$

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{x}}_2 = \lambda_2 \underline{\underline{x}}_2$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$$

$$Z_N = T_V \underline{\underline{V}}^N = T_V \left(\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{-1} \right)^N$$

$$= \text{Tr} \left(\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N \underline{\underline{A}}^{-1} \right) \quad \text{miter zähl. Invarianz der Spur}$$

$$= \text{Tr} \left(\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N \right)$$

$$Z_N = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N \right) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{pmatrix} \right) = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

in unserem Fall:

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh \beta h$$

$$\pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}$$