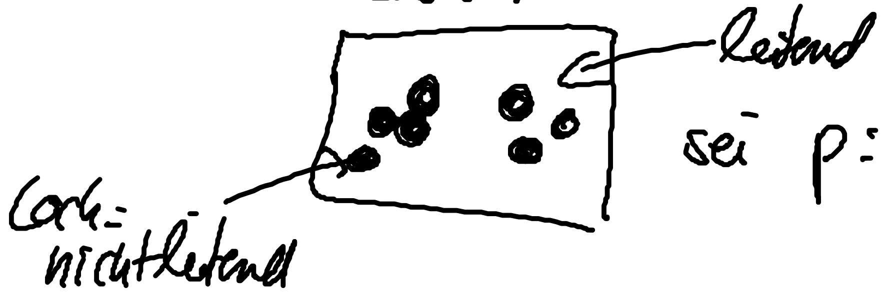
IV: Perkolationsphänomene

IV.1. Was ist Perkolation

Beispiele (→ s. z.B. Schwabl)

i) Zweidimensionaler "Leiter" mit kontinuierlich (statistisch) verteilten Löchern



sei p: Bruchteil der leitenden Fläche

Annahme:

$p < p_c$: Leitenden Flächenstücke bilden keine "durchgehende Brücke" → Leitfähigkeit verschwindet

$p > p_c$: Leitende Verbindung von einem Rand zum anderen → Material leitet

man nennt

p_c : Perkolationsschwelle

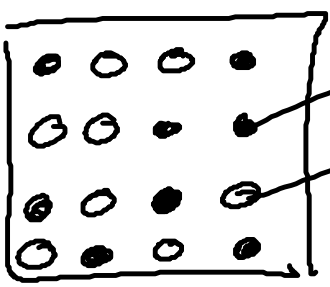
und das ganze Phänomen einen "Perkolationsphasenübergang"

$p<p_c$: es gibt nur endlich große "Cluster" (des leitenden Materials)

$p>p_c$: es gibt mindestens einen "perkolierenden", "unendlichen" Cluster
↳ leitende Verbindung

Beachte:
Perkolationsphasenübergang ist eigentlich geometrische Natur!
hier: "Kontinuumsperkolation"

(ii) Zweidimensionalen Leiter:
Gitter, wenn "verdünnt" ist



geordnetes Gitter, aber nicht alle Plätze mit leitenden Elementen besetzt!

Sei p: Wahrsch., daß ein Platz mit leitendem Element besetzt ist

$p<p_c$: Leitenden Plätze bilden nur kleine Inseln ("endl. Cluster")
"isolierenden Phase"

$p=p_c$: Es gibt gerade eine durchgehende Verbindung von leitenden Plätzen (perkolierender Cluster)

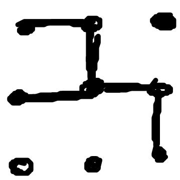
$p > p_c$: "Leitende Phase"

Beispiel für "Site-Perkolation"

↑ Platz

(ii) "Sol-Gel" Übergang: z.B. Hartkochen eines Ei's!

↑ Lösung ↑ Gelatine-artige



Gitter aus Monomeren (Atome), die sich chemisch verbinden können in Makromoleküle
↳ Netzwerk aus chem. Bindungen

p : Wahrsch. für das Ausbilden einer chem. Bindung

$p < p_c$: Bildung endl. großer Moleküle ("Cluster")

$p > p_c$: Bildung eines systemüberspannenden Netzwerks

"Bond percolation"

IV.2. Zusammenhang Perkolation $\Longleftrightarrow$ thermodyn. Phasenübergang 2. Ordnung

<u>Ordnungsparameter</u>

P_∞ : Wahrsch., daß ein besetzter Platz oder eine dem. Bindung zu einem unendlichen Cluster gehört

$p < p_c$: $P_\infty = 0$!   ~~es gilt~~

$p \geq p_c$: $P_\infty \geq 0$!

es gilt: $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$, $p > p_c$

(analog: $M \sim (T_c - T)^\beta$ für $T < T_c$ Magnetismus)

"Korrelationslänge":

charakterisiert hier die lineare Abmessung der endlichen Cluster ($p<p_c$)

es gilt: $\xi \sim |p-p_c|^{-\nu}$ divergiert für $p \to p_c$

S: mittlere Zahl von Plätzen (chem. Bindungen) in einem endlichen Cluster ($p<p_c$)

$S \sim |p-p_c|^{-\gamma}$ divergiert für $p \to p_c$

Beachte auch:

Genau wie bei thermodynamischen PÜ's 2. Ordnung zeigen auch Perkolationsübergänge Universalität

Exponenten sind unabhängig von Art der Wechselwirkung, Gittertyp, und Art der Perkolation

— aber abhängig von Raumdimension

IV.3. Theoret. Beschreibung

sei $p < p_c$:

n_s Zahl von Clustern der Größe s relativ zur Zahl <u>aller</u> Gitterplätze (N)

$$s n_s : \frac{\text{Zahl von Gitterplätzen in Clustern der Größe } s}{N}$$

$\hat{=}$ Wahrsch., daß ein Platz einem Cluster der Größe s angehört!

$$\sum_{s=1}^{\infty} s n_s = \frac{\text{Zahl aller besetzten Plätze}}{N}$$

$\hat{=}$ Wahrsch., daß ein Platz zu irgendeinem endlichen Cluster gehört!

$= p$ (früher eingeführte Besetzungswahrsch.)

mittlere Größe eines Clusters ($p < p_c$)

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} s \text{ "mal" Wahrsch. für das Auftreten eines Clusters der Größe } s$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} s \text{ "mal" } \frac{\text{Zahl der Plätze in Clustern der Größe } s}{\text{Zahl aller besetzten Plätze}}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{s=1}^{\infty} s \text{ "mal" } \frac{s n_s}{p}$$

$$= p^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 n_s$$

IV. 4. (Site-) Perkolation in einer Dimension

• • • • • •   lineare Kette von Gitterplätzen

Beachte: Ein unendlicher Cluster kann nur vorliegen, wenn <u>alle</u> Plätze besetzt sind!

$$\Rightarrow p_c = 1 \; (= p_{max})$$

⇒ In diesem Modell können wir nur die "isolierende Phase" ($p < p_c$) studieren!

⇒ es macht keinen Sinn, einen Ordnungsparameter zu studieren; betrachte stattdessen die Größe S (mittlere Größe eines Clusters!

Was ist n_s? (Zahl von Clustern der Größe s relativ zu N)

betrachte dazu

Wahrsch., daß ein Platz einem Cluster der Größe s angehört! ($= s n_s$)

$$= s\, p^s \underbrace{(1-p)^2}_{\text{Wahrsch., daß die beiden angrenzenden Plätze unbesetzt sind}}$$

Wahrsch., daß s aufeinanderfolgende Plätze besetzt sind!

der Platz an s Position im Cluster sein

d.h. $n_s = p^s (1-p)^2$

einsetzen:

$$S = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 n_s$$

$$= p^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s (1-p)^2$$

$$= \frac{(1-p)^2}{p} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s$$

$$= \frac{(1-p)^2}{p} \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 \sum_{s=1}^{\infty} p^s \quad \text{geometr. Reihe}$$

$$= \frac{(1-p)^2}{p} \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 \left(\frac{p}{1-p}\right) = \ldots = \frac{1+p}{1-p}$$

Wir wissen: $p_c = 1$!

$$\Rightarrow S \sim (p_c - p)^{-1}$$

divergiert
für $p \to p$

$\Rightarrow \gamma = 1$