

# III. Quantenstatistik

## III.1 Symmetrien

Betrachte System aus  $N$  quantenmechanischen Teilchen

→ Zustand des Systems wird durch Wellenfunktion

$$\psi(q_1, \dots, q_N) = \psi(1, 2, \dots, N) \text{ beschrieben}$$

↑  
Teilchenkoordinaten

Betrachte ununterscheidbare Teilchen (z.B. Elektronen)

Folgerung:

- Physikalische Größen wie Aufenthaltswahrscheinlichkeit und Gesamtenergie  $E$  müssen invariant gegenüber

Teilchenaustausch sein!

$$i \leftrightarrow j$$

Konsequenzen:

Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N) \psi^*(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N)$$

$$\stackrel{!}{=} \psi(1, \dots, j, \dots, i, \dots, N) \psi^*(1, \dots, j, \dots, i, \dots, N)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(1, \dots, j, \dots, i, \dots, N) = \pm \psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N)} \quad (*)$$

Führe Austausch-Operator ein

$$\hat{P}_{ij} \psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N) = \psi(1, \dots, j, \dots, i, \dots, N) \\ = \lambda_{1,2} \psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N)$$

Man sagt: Die  $N$ -Teilchen - Wellenfunktion ist eine Eigenfunktion des Austauschoperator mit dem Eigenwert

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{"total symmetrische Zustände"}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{"total antisymmetrische Zustände"}$$

- Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktion ist Eigenschaft der zugehörigen Teilchen
- Es gibt Zusammenhang zwischen Symmetrie und dem Spin ("Spin - Statistik - Theorem" von Pauli)
  - Teilchen mit halbzahligem Spin haben antisymmetrische Wellenfkt.

$$\text{"Fermionen" } (S_z = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots)$$

z.B.  $e^-$ , Proton, Neutron, Neutron, Myon  ${}^3\text{He}$ ,

- Teilchen mit ganzzahligem Spin haben symmetrische Wellenfkt.

"Bosonen" ( $s_z = 0, 1, \dots$ )

z.B. Photon,  $\pi$ -Meson  
 $(s_z = 1)$        $(s_z = 0)$

- Der Symmetriecharakter ist eine Erhaltungsgröße  
 d.h.  $[\hat{P}_{ij}, \hat{H}] = 0$        $\hat{H} \psi(1 \dots i, \dots j, \dots N) = E \psi(1 \dots N)$

### III.2. Symmetrie und Besetzung von Quantenzuständen

Sowohl für Fermionen als auch für Bosonen gilt

Der Zustand des Gesamtsystem kann, außer durch die Gesamtwellenfunktion  $\psi$ , auch durch die Angabe der Besetzungszahlen  $n_\alpha$  der "Einteilchenzustände"  $\psi_\alpha$  charakterisiert werden, also durch

$$(\{n_\alpha\}) = (n_1, n_2, \dots) \quad \text{"Besetzungszahl-Darstellung"}$$

Es gilt  $\sum_\alpha n_\alpha = N$       Gesamtteilchenzahl

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} \epsilon_{\alpha} = E \quad \text{Gesamtenergie}$$

↙ Energie des Einteilchenzustand

Summe statt Integral

da Energiezustände in der QM diskret vertilt sind !!

## Unterschied zwischen Fermionen & Bosonen

### Bosonen

→ total symmetrische Wellenfunktion

→  $n_{\alpha} = [0, N]$  für alle  $\alpha$

### Fermionen

→ total antisymmetrische Wellenfunktion ("Skalar-Dehminante")

impliziert, dass jeder Quantenzustand  
höchstens einmal besetzt werden kann

$n_{\alpha} = [0, 1]$  für alle  $\alpha$

## III.3. Großkanonische Zustandssumme

Zunächst: kanonische Zustandssumme

$$Z_{kl} = \sum_j e^{-\beta E_j} \quad \text{mit} \quad E_j = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \epsilon_{\alpha}$$

↑

Summe über mögliche Energiezustände des Gesamtsystems

$$Z_k = \sum_{\{n_\alpha\}} e^{-\beta \sum_{\alpha} n_{\alpha} \epsilon_{\alpha}}$$

Summe über alle möglichen Sätze  $\{n_{\alpha}\}$

so, dass immer die Nebenbedingung  $\sum_{\alpha} n_{\alpha} = N$  erfüllt ist!!

↙  
schwer zu handhaben

Daher besser großkanonisch, wo  $N$  nicht fest ist!

$$Z_{GK} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_k(N)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \sum_{\{n_{\alpha}\}}^* e^{-\beta \sum_{\alpha} n_{\alpha} \epsilon_{\alpha}}$$

benutze  $N = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\alpha}\}} e^{-\beta \left( \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha} - \mu) n_{\alpha} \right)}$$

$$Z_{GK} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\alpha}\}} \prod_{\alpha} e^{-\beta (\epsilon_{\alpha} - \mu) n_{\alpha}}$$

Beachte nun:

Da in  $Z_{GK}$  über alle Teilchenzahlen  $N$  summiert wird

können die Summen über die Besetzungszahlen auch unabhängig voneinander durchgeführt werden!

$$\Rightarrow Z_{GR} = \sum_{\{n_\alpha\}} \prod_{\alpha} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)n_{\alpha}}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{n_1^{\max}} \sum_{n_2=0}^{n_2^{\max}} \dots \prod_{\alpha} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)n_{\alpha}}$$

Fermionen  $n_i^{\max} = 1$   
 Bosonen  $n_i^{\max} = \infty!$

Beachte nun:

Summation und Produkt im  $Z_{GR}$  können vertauscht werden.

Zeige das explizit für Fermionen:

$$x_{\alpha}^{n_{\alpha}} = e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)n_{\alpha}}$$

$$\sum_{\{n_{\alpha}\}} \prod_{\alpha} x^{n_{\alpha}} = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 x_1^{n_1} x_2^{n_2} = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2$$

$$\prod_{\alpha} \sum_{\{n_{\alpha}\}} x^{n_{\alpha}} = (1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 \quad \text{q.e.d.}$$

$$\Rightarrow Z_{GR} = \prod_{\alpha} \sum_{\{n_{\alpha}\}} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)n_{\alpha}}$$

Auswertung für Fermionen:

$n_{\alpha} = 0, 1$

$$\Rightarrow Z_{GR} = \prod_{\alpha} \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} \right)$$

## Bosonen

$$n_\alpha = 0, 1, \dots, \infty$$

Annahme  $e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} < 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \mu < \epsilon_\alpha$  für alle Zustände  $\alpha$

In diesem Fall ist die Summe in  $Z_{GK}$  eine geometrische Reihe d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{mit } x = e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} < 1$$

$$Z_{GK}^{\text{Bosonen}} = \prod_{\alpha} (1 - e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)})^{-1}$$

=> Großkanonisches Potenzial

$$J = -kT \ln Z_{GK}$$

$$= \pm kT \sum_{\alpha} \ln (1 \mp e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)})$$

oberes Vorzeichen: Bosonen

unteres " Fermionen

## III. 4. Statistiken, thermodynamische Größen

Betrachte die mittlere Besetzungszahl des Zustandes mit Energie  $\epsilon_\alpha$

$$\langle n_\alpha \rangle = \frac{1}{Z_{GK}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_e(N) n_\alpha$$

$$= \frac{1}{Z_{GK}} \prod_{\alpha'} \sum_{n_{\alpha'}} e^{-\beta (\epsilon_{\alpha'} - \mu) n_{\alpha'}} n_{\alpha'}$$

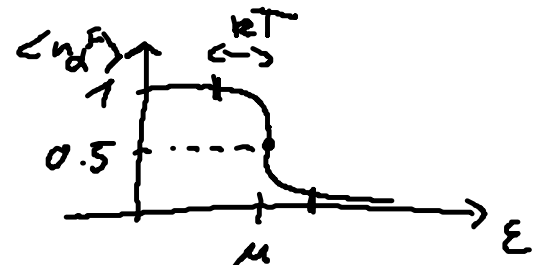
beachte: Nur Term mit  $\alpha = \alpha'$  trägt bei, Rest kürzt sich heraus  
wegen der Produkte in Zähler und Nenner!

$$\Rightarrow \langle n_\alpha \rangle = \frac{\sum_{n_\alpha} e^{-\beta (\epsilon_\alpha - \mu) n_\alpha} n_\alpha}{\sum_{n_\alpha} e^{-\beta (\epsilon_\alpha - \mu) n_\alpha}}$$

Fermionen  $n_\alpha = 0, 1$

$$\Rightarrow \langle n_\alpha^F \rangle = \frac{e^{-\beta (\epsilon_\alpha - \mu)}}{1 + e^{-\beta (\epsilon_\alpha - \mu)}}$$

$$\langle n_\alpha^F \rangle = \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_\alpha - \mu)} + 1}$$



Fermi-Dirac Statistik

Bosonen:  $n_\alpha = 0, 1, 2, \dots, \infty$



$$\langle n_\alpha^3 \rangle = \frac{\sum_{n_\alpha=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)n_\alpha} n_\alpha}{\sum_{n_\alpha=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)n_\alpha}}$$

=

$$= -\frac{\partial}{\partial y} \ln \underbrace{\sum_{n_\alpha=0}^{\infty} (e^{-y})^{n_\alpha}}_{\text{mit } y = \beta(\epsilon_\alpha - \mu)}$$

Konvergente geometrische Reihe

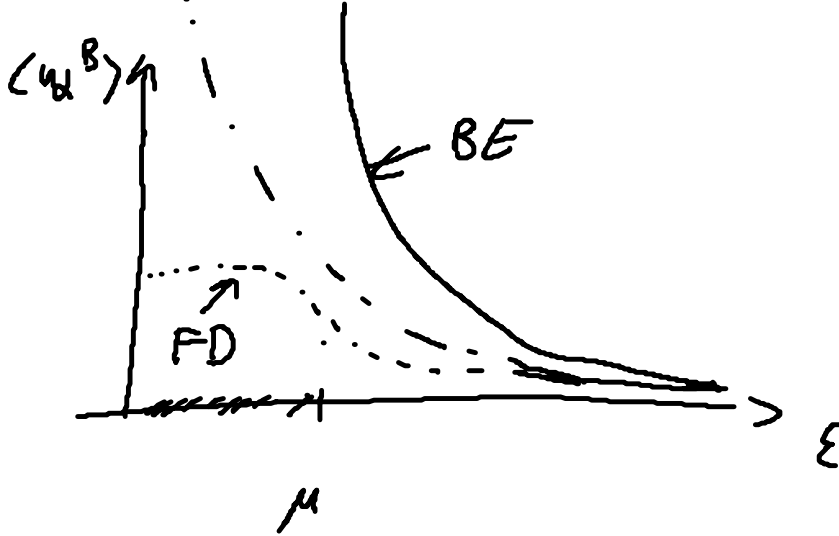
falls  $e^{-y} < 1 \Leftrightarrow \mu < \epsilon_\alpha$

$$= -\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{1 - e^{-y}} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(1 - e^{-y})$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-y}} (-e^{-y})(-1) = \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}$$

$$\langle n_d^B \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_d - \mu)} - 1}$$

Boltzmann



"Bose-Einstein-Statistik"

$$\mu < \epsilon_d$$

Weitere Größen

mittlere gesamt-Teilchenzahl

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{\alpha} \langle n_{\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} + 1} \end{aligned}$$

mittlere Energie:

$$\langle E \rangle = \sum_{\alpha} \langle n_{\alpha} \rangle \epsilon_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} + 1}$$

obere Vorzeichen BE  
untere " FD

Entropie

$$S = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right|_{\mu, V} \dots$$

i  
(