

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$-\infty \rightarrow$  enthalten  $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$   
Zustandsdichte

$$= \dots = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{F^{(2n-1)}(\varepsilon)}{\frac{(\varepsilon-\mu)^{2n}}{2n!} (-n'(\varepsilon))} \Big|_{\varepsilon=\mu}$$

neue Variable  $x = \beta(\varepsilon - \mu)$

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_B T)^{2n} F^{(2n-1)}(\mu)$$

mit  $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left( -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{e^x + 1} \right) \right)$

Bei sehr kleinen Temperaturen sollte es ausreichen, nur die Term mit  $n=1$  zu betrachten

$$a_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \left( -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{e^x + 1} \right) \right) = \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow I \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + \mathcal{O}((k_B T)^4)$$

### III. 4.3. Anwendungen der Sommerfeldentwicklung → Spezifische Wärme (von Metallen)

Teilchenzahl

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$$\text{d.h. } F(\varepsilon) = g(\varepsilon)$$

mit Sommerfeld-Methode:

$$\textcircled{*} N \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + O(T^4)$$

Nimmt man  $N$  als fest an, so läßt sich  
aus  $\textcircled{*}$  das chemische Potential bestimmen  
↳ und seine Temperaturabhängigkeit!

Erinnerung:  $g(\epsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \epsilon^{1/2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) + \int_{\epsilon_F}^{\mu} d\epsilon g(\epsilon)$$

$$g'(\epsilon) = \frac{3}{4} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \epsilon^{-1/2}$$

$$= N + \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \left[ \frac{2}{3} \epsilon^{3/2} \right]_{\epsilon_F}^{\mu}$$

$$= N + \left( \frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} N - N \frac{\epsilon_F^{3/2}}{\epsilon_F^{3/2}} = N \left( \frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2}$$

einsetzen in (\*)

$$N = N \left( \frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 N \left( \frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \frac{1}{\mu^2} + O(T^4)$$

$$\Rightarrow 1 = \left( \frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right) + O(T^4)$$

$\sim 10^{-4}$   
typ. Größenordn.

Ansatz:

$$\mu(T) = \mu(T=0) + \delta\mu(T)$$

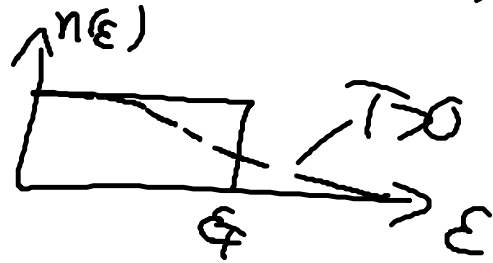
$$= \epsilon_F + \delta\mu(T)$$

$$\Rightarrow \rho_{\mu}(T) = -\frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + O(T^4)$$

$$\Rightarrow \mu = E_F - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + O(T^4)$$



Chem. Potential verringert sich mit steigender Temperatur!  
 Grund: Für  $T > 0$  sind nicht mehr alle Zustände bis  $E_F$  gefüllt!



Mittlere Energie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon n(\epsilon)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 (g(\mu) + \mu g'(\mu))$$

benutze.

$$\int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon = \frac{3}{5} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{5/2}$$

$$g(\mu) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{1/2}, \quad \mu g'(\mu) = \frac{3}{4} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{1/2}$$

einsetzen in die Gleichung für  $E$  und

benutzen, daß  $\mu \approx \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{E}{N} = \frac{E(T=0)}{N} + \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\varepsilon_F} \left(k_B T\right)^2 + \mathcal{O}(T^4) \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ E(T=0) \\ = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \end{array}$$

Betrachte nun die spezifische Wärme

$$\tilde{C}_V = \frac{C_V}{N} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{E}{N} \right) \Big|_{N, V}$$

mit Ausdruck für die Energie

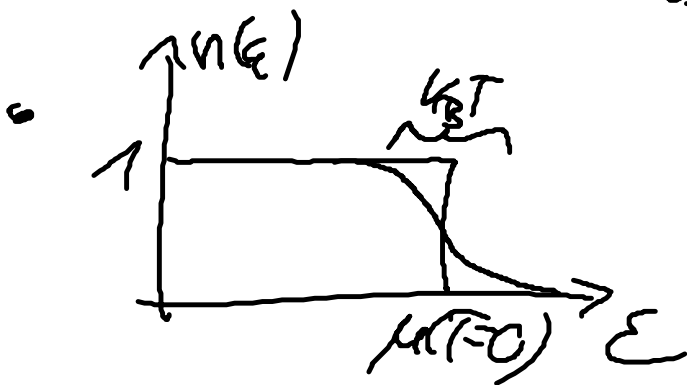
$$\tilde{C}_V = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B T}{E_F} + AT^3$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(E_F) + AT^3$$

↑  
Zustands-  
dichte an der  
Fermienergie

$$g(E_F) = \frac{3}{2} \frac{N}{E_F^{3/2}} E_F^{1/2}$$

qualitative Erklärung für die  
lineare Temperaturabhängigkeit von  $C_V$



Erhöhe  $T$  von  $T=0$   
auf endlichen Wert

→ Rege Elektronen an mit  
 $E \approx \mu(T=0) - \frac{k_B T}{2}$  auf  
 $\mu(T=0) + \frac{k_B T}{2}$

• Zahl der Elektronen, die von dieser  
Anregung betroffen sind:  $g(E_F) \times k_B T$

⇒ Erhöhung der Energie um

$$\frac{\Delta E}{N} \sim (k_B T)^2 g(E_F)$$

$$\Rightarrow \frac{C_V}{N} = \tilde{C}_V \text{ linear in } T$$

$$\text{(aus Sommerfeld: } \tilde{C}_V = k_B \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(E_F)$$

Vergleiche mit dem klassischen Resultat

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \rightarrow \tilde{C}_V = \frac{C_V}{N} = \frac{3}{2} k_B \quad !$$



Wie gut ist die Vorhersage aus  
der Sommerfeld-Entwicklung?

$$\frac{\hat{C}_V}{T} = \underbrace{(k_B)^3 \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\epsilon_F}}_{\gamma} + A T^2$$



Summenfeld-Theorie (und damit die Theorie der idealen Fermionen) liefert richtige Größenordnungen  $\gamma$ !

Fermi-Theorie wird falsch ~~bei~~ bei höheren Temperaturen!  
 $\rightarrow$  Wechselwirkungseffekte, Gitterschwingungen (Phononen)

### III. 5. Bosone bei hohen Temperaturen

Was erwarten wir?

hohe  $T \rightarrow$  Bosonsystem will seine Energie minimieren!  
 $\rightarrow$  Teilchen besetzen möglichst tiefergelegene Energieniveaus



beach: Für Bosen gibt es kein Pauli-Prinzip!  
→ (im Prinzip können alle Teilchen in das  
GZ-Niveau gehen!

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} : \text{GZ Zustand mit } p=0!$$

→  $N_{p=0} \sim O(N)$  für  $T \rightarrow 0$ !  
"makroskop. Besetzung des  
Grundzustand"

BE-Kondensation: Besetzung des GZ  
erfolgt "nicht-trivial"

→ eine Art "Phasenübergang"

- "Hochtemperaturphase":  
Teilchen gemäß der BE-Statistik auf  
Niveaus verteilt
- "Tiefemperaturphase":  
GZ ist makroskopisch besetzt