

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$-\infty \rightarrow$ enthalten $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$
Zustandsdichte

$$= \dots = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon F^{(2n-1)} \Big|_{\varepsilon=\mu} \frac{(\varepsilon-\mu)^{2n}}{2n!} (-n'(\varepsilon))$$

neue Variable $x = \beta(\varepsilon - \mu)$

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_B T)^{2n} F^{(2n-1)}(\mu)$$

mit $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) \right)$

Bei sehr kleinen Temperaturen sollte es ausreichen, nur die Term mit $n=1$ zu betrachten

$$a_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) \right) = \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow I \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + \mathcal{O}((k_B T)^4)$$

III. 4.3. Anwendungen der Sommerfeldentwicklung → Spezifische Wärme (von Metallen)

Teilchenzahl

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$$\text{d.h. } \overline{f(\varepsilon)} = g(\varepsilon)$$

mit Sommerfeld-Methode:

$$\textcircled{1} N \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + O(T^4)$$

Nimmt man N als fest an, so läßt sich
aus $\textcircled{1}$ das chemische Potential bestimmen
↳ und seine Temperaturabhängigkeit!

Einnern: $g(\epsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \epsilon^{1/2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) &= \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) + \int_{\epsilon_F}^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) \\ &= N + \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \left[\frac{2}{3} \epsilon^{3/2} \right]_{\epsilon_F}^{\mu} \\ &= N + \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} N - N \frac{\epsilon_F^{3/2}}{\epsilon_F^{3/2}} = N \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

$g(\epsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \epsilon^{1/2}$

einsetzen in (*)

$$N = N \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 N \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \frac{1}{\mu^2} + O(T^4)$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right) + O(T^4)$$

$\sim 10^{-4}$
 typ. Größenordn.!

Ansatz:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T=0) + \delta\mu(T) \\ &= \epsilon_F + \delta\mu(T) \end{aligned}$$

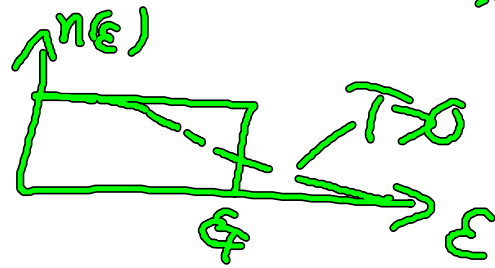
$$\Rightarrow g_{\mu}(T) = -\frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^2 + O(T^4)$$

$$\Rightarrow \mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^2 + O(T^4)$$



Chem. Potential verringert sich mit steigender Temperatur!

Grund: Für $T > 0$ sind nicht mehr alle Zustände bis ϵ_F gefüllt!



Mittlere Energie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon n(\epsilon)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 (g(\mu) + \mu g'(\mu))$$

benutze.

$$\int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon = \frac{3}{5} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{5/2}$$

$$g(\mu) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{1/2}, \quad \mu g'(\mu) = \frac{3}{4} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{1/2}$$

einsetzen in die Gleichung für E und

bestimmen, daß $\mu \approx \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{E}{N} = \frac{E(T=0)}{N} + \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\varepsilon_F} (k_B T)^2 + O(T^4) \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ E(T=0) \\ = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \end{array}$$

Betrachte nun die spezifische Wärme

$$\tilde{C}_V = \frac{C_V}{N} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E}{N} \right) \Big|_{N, V}$$

mit Ausdruck für die Energie

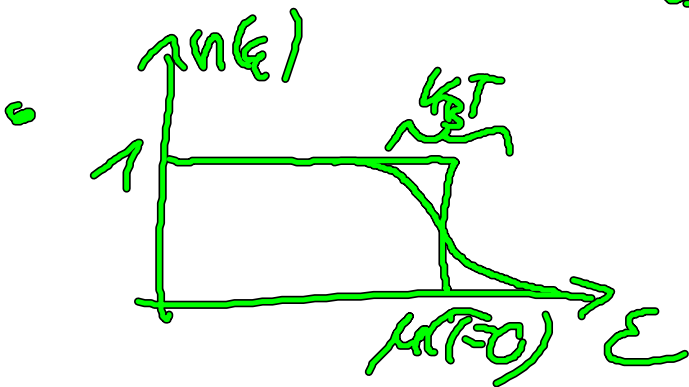
$$\tilde{C}_V = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} + A T^3$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(\epsilon_F) + A T^3$$

↑
Zustands-
dichte an der
Fermienergie

$$g(\epsilon_F) = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^2} \epsilon_F^{\frac{1}{2}}$$

qualitative Erklärung für die
lineare Temperaturabhängigkeit von C_V



Erhöhe T von $T=0$
auf endliche Wert

→ Rege Elektronen an mit
 $\epsilon \approx \mu(T=0) - \frac{k_B T}{2}$ auf
 $\mu(T=0) + \frac{k_B T}{2}$

• Zahl der Elektronen, die von dieser
Anregung betroffen sind: $g(\epsilon_F) \times k_B T$

⇒ Erhöhung der Energie um

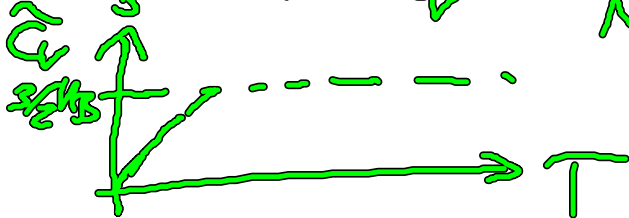
$$\frac{\Delta E}{N} \sim (k_B T)^2 g(E_F)$$

$$\Rightarrow \frac{C_V}{N} = \tilde{C}_V \text{ linear in } T$$

$$\text{(aus Sommerfeld: } \tilde{C}_V = k_B \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(E_F)$$

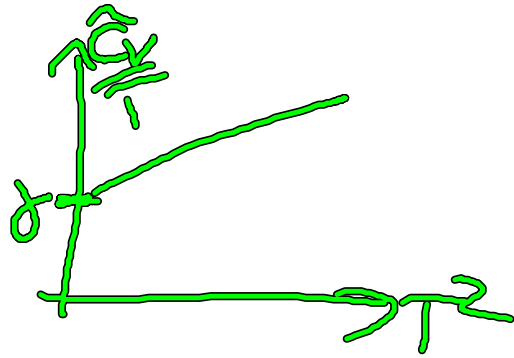
Vergleich mit dem klassischen Resultat

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \rightarrow \tilde{C}_V = \frac{Q}{N} = \frac{3}{2} k_B \quad !$$



Wie gut ist die Vorhersage aus
der Sommerfeld-Entwicklung?

$$\frac{\hat{E}}{T} = \underbrace{(k_B)^3 \frac{\pi^2}{2 \epsilon}}_{\gamma} + A T^2$$



Summefeld-Theorie (und damit die Theorie des idealen Fermigases) liefert richtige Größenordnungen für δ !

Fermi-Theorie wird falsch bei hoher Temperatur!
 → Wechselwirkungseffekte, Gitterstörungen (Phononen)

III. 5. Bosone bei hoher Temperatur

Was erwarten wir?

hohe $T \rightarrow$ Bosonsystem will seine Energie minimieren!
 → Teilchen besetzen möglichst tiefliegende Energieniveaus

beach: Für Bosen gibt es kein Pauli-Prinzip!
→ (im Prinzip können alle Teilchen in das
GZ-Niveau gehen!

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} : \text{GZ Zustand mit } p=0!$$

→ $N_{p=0} \sim O(N)$ für $T \rightarrow 0$!
"mathematischer Beweis des Grundzustand"

BE-Kondensat: Beweis des GZ erfolgt "nicht-trivial"

→ eine Art "Phasenübergang"

- "Hochtemperaturphase":
Teilchen gemäß der BE-Statistik auf
Niveau verteilt
- "Tiefemperaturphase":
GZ ist mathematisch bewiesen