III.5.1. Bose-Einstein-Kondensation

Betrachte System aus wechselwirkungsfreien Bosonen, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)} - 1}$$

Damit $\langle n_p \rangle$ "physikalisch" ist, also $\langle n_p \rangle \geq 0$ und $\langle n_p \rangle$ endlich, muß gelten:

$$e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)} > 1 \Leftrightarrow \mu < \frac{p^2}{2m} \;\; \forall p \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\mu < 0}}$$

$\mu < 0 \Longrightarrow$ Fugazität $z = e^{\beta\mu}$

$\Longrightarrow 0 \leq z < 1$

Betrachte $\langle n_p \rangle$ direkt bei $z = 1$

$$\langle n_p \rangle\Big|_{z=1} = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\frac{p^2}{2m}} - 1}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{e^{\beta\frac{p^2}{2m}} - 1}$$

divergiert für $p=0$
d.h. im Grundzustand!

Diese Divergenz reflektiert:
Für Bosonen kann der Grundzustand "makroskopisch besetzt werden, da kein Pauli-Prinzip!

Beachte: Das Besondere an der BE-Kondensation ist, daß die makroskopische Besetzung bereits ab einer Temperatur $\underline{\underline{T_C > 0}}$ erfolgt!

Bestimmung von T_C:

betrachte mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle = \sum_p \langle n_p \rangle$

ersetze Summe durch Integral

$$\Rightarrow \rho = \frac{\langle N \rangle}{V} = \lambda_T^{-3}\, g_{3/2}(\underbrace{z}_{e^{\beta\mu}})$$

ergibt Problem bei $z=1$!

eine genauere Analyse zeigt

$z \to 1 \iff \rho \lambda_T^3 = 2.612$

mit $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m k_B T}}$

Dies definiert eine kritische Temperatur $T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m}\left(\frac{2.612}{\rho}\right)^{2/3} \sim \rho^{-2/3}$

$T > T_c$: "normales" Bosonensystem wobei der Grundzustand ($p=0$) im thermodynamisch ($z<1$) Limes unbesetzt ist

<u>$T < T_c$</u>:

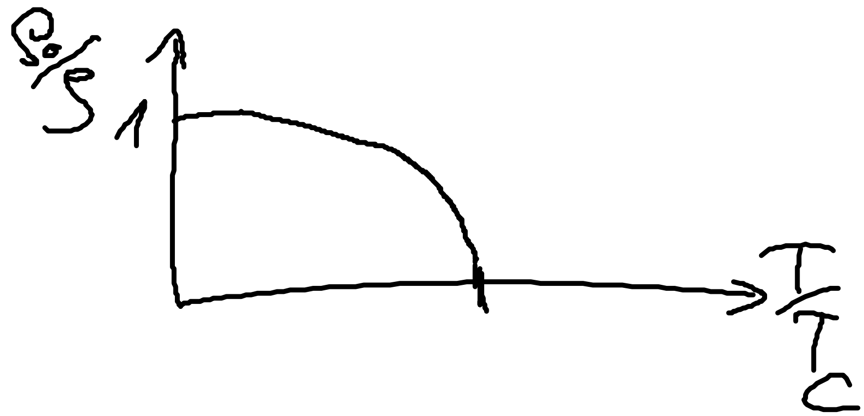
Dichte besteht aus 2 Anteilen

$$\rho = \underbrace{\rho_0(T)}_{\substack{\text{Dichte der}\\ \text{Teilchen im GZ}\\ (p=0)}} + \rho_n(T)$$

$\rho_n(T) \to \frac{1}{V}\sum_{p \neq 0} \langle n_p \rangle$

d.h. $\rho_0 = \frac{1}{V}\langle n_{p=0} \rangle$

mit $\frac{\rho_0(T)}{\rho} = \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$ „Anteil des Kondensats"



$\Rightarrow$ BE-Kondensation ist ein Phasenübergang, wobei ρ_0/ρ (Anteil des Kondensats) gerade die Rolle eines Ordnungsparameters spielt!

$\rho \lambda_T^3 = 2.612$ Bestimmungsgleichung für T_C

Phasenübergang tritt also dann auf, wenn der mittlere Teilchenabstand ($\rho^{-\frac{1}{3}}$) vergleichbar wird mit λ_T

$\Leftarrow$ Ausdehnung des quantenmechan. Wellenpakets!

<u>Druck des Bosonengases</u>

$$p = -\frac{J}{V} = -\frac{k_B T}{V} \sum_{\vec{p}} \ln\left(1 - e^{-\beta p^2/2m} \cdot z\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{k_B T}{V}\ln(1-z)}_{\text{Anteil des GZ}} + \underbrace{\frac{k_B T}{\lambda_1^3} g_{5/2}(z)}_{\text{bekannter Anteil der angeregten Zustände}}$$

$T > T_C$: Anteil aus GZ verschwindet im thermodyn. Limes da $z < 1$

$T < T_C$: hier kann man schätzen: $z = 1 - \frac{a}{V}$
$z \approx 1$ $\Rightarrow$ auch hier verschwindet der GZ-Anteil, da $\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\ln\frac{1}{V} = 0$

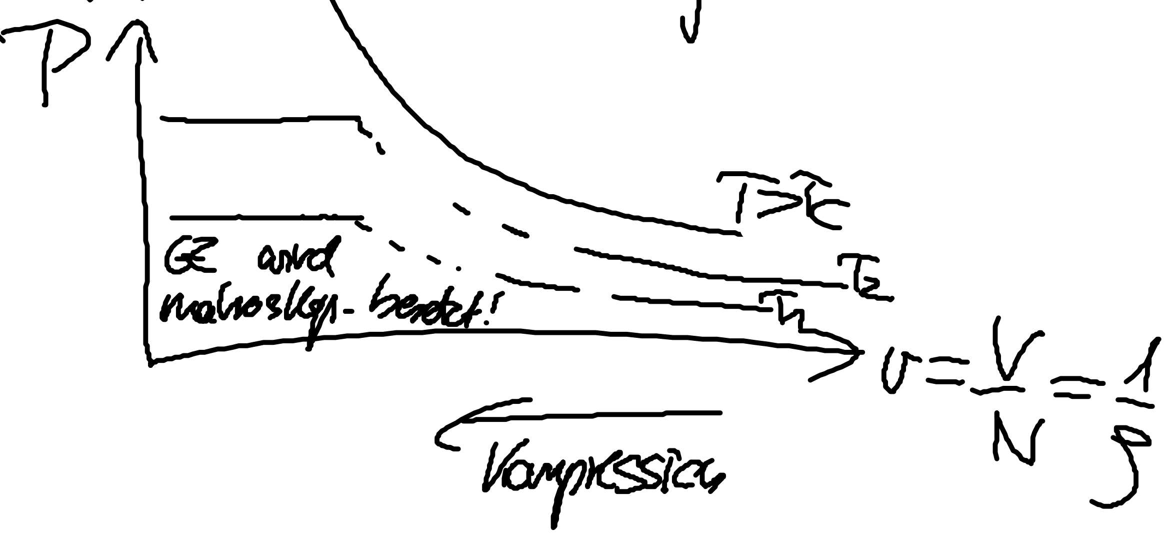
$\Rightarrow T < T_C$: $p \approx \frac{k_B T}{\lambda_1^3} g_{5/2}(1)$!

Insgesamt:

$$p = \begin{cases} \frac{k_B T}{\lambda_1^3} g_{5/2}(z) & , T > T_C \\ \frac{k_B T}{\lambda_1^3} 1.342 & , T < T_C \end{cases}$$

Interpretation:
- Kondensat liefert gar keinen Anteil zum Druck!
- $T > T_C$: p ist Fkt. von T und μ (d.h. von ρ!)
- $T < T_C$: p nur Fkt von T !

graphisch Bosonengas



$\cancel{T_1} < T_2 < T_c$

Zum Vergleich: klass. Fluids mit Kondensationsphasenübergang

- BE-Kondensation hat Ähnlichkeit zur Kondensation eines klass. Gases, wenn man das spezif. Volumen einer beteiligten Phase gleich Null setzt

- Unterschiede:

Bei der BE-Kondensation findet keine räumliche Phasentrennung statt!
(wie beim klass. Fluid)

— statt dessen hat man „Phasentrennung" im Impulsraum

Bei der BE-Kondensation keine echte Phasenkoexistenz mit Gleichheit der chem. Potentiale und Drücke!

Inzwischen wurde BE-Kondensation auch experimentell beobachtet!

Seit 1995 wurde BE-Kondensation in einer Reihe atomarer Gase ~~entd~~ entdeckt
z.B. Na, Rb, Li

typ. Übergangstemperatur:

Rb ~ 10^{-9} K

Li ~ 10^{-9} K

$(\rho\lambda_T^3 \approx 2.6)$

sehr tief ⇒ entsprechende Dichte sind nicht extrem groß
⇒ WW zw. den Teilchen sehr schwach!

z.B. Bradley et al. PRL 75, 1687 (1995)

Beachte:
Hier ist das BE-Verhalten nicht ganz ideal, da es immer noch schwache WW-Effekte der Teilchen untereinander gibt, und das System räuml. eingeschränkt ist (thermodyn. Limes nicht ganz erfüllt!)

$$\frac{\rho_0(T)}{\rho} = \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$$ ideales BE-Gas