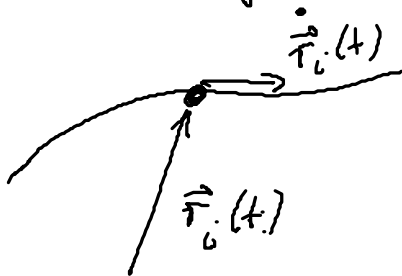


Das Poyntingtheorem beschreibt die zeitliche Änderung der Energie dichte des elektromagnetischen Felds  $w_{em}$  im Raum um Punkt  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  durch Zu- und Abstrom der Energie ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \hat{=} \text{Quelle des Energiestroms } \vec{S} = \text{Poynting vektor}$ ). Verluste werden durch Leistungsenergie-dichte  $P = \vec{j} \cdot \vec{E}$  beschrieben.

Verluste treten auch bei  $j = \text{konstant}$  auf.

$$\partial_t w_{em} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{S} - P$$

Deutung des  $P = \vec{j} \cdot \vec{E}$ -Terms im Poyntingtheorem



Berechnung der Arbeit die ein em. Feld an dem LIT verrichtet

$$A = \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot \vec{f}_L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) =$$

$$= \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot q_i (\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i)$$

Index  $i$ : Feld am Ort des Teilchens  $i$

$$A = \int d^3r \sum_i \underbrace{\int d\vec{r}_i \cdot q_i (\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i)}_{*} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$* = \int_{t_0}^t dt' \frac{d\vec{r}_i}{dt'} \cdot q_i (\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i)$$

$$= \int_{t_0}^t dt' q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{E}_i$$

$\dot{\vec{r}}_i \cdot (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i) \rightarrow 0$   
Magnetfeld verrichtet keine Arbeit

$$P^i = \dot{A} = \int d^3r \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Leistung

$$= \int d^3r \underbrace{\vec{j}(\vec{r}, t)}_P \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$P = \vec{j} \cdot \vec{E}$  ist also die Leistungsdichte.

## 5) Lagrangeformulierung f. elektromagnetische Felder

---

Ziel: Ableitung der Maxwellgleichungen im Lagrangeformalismus  
einkünftliche Formulierung, später: Quantenmechanik

## 5.1) Einführung an klassische Mechanik

a) Newton formalismus: Teilchen im Potential  $U(x)$   
 $m \ddot{x} + \partial_x U(x) = 0$   $x$ : Bahnkurve  $x(t)$

b) Lagrange formalismus:  $L = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad L \text{ Lagrangefunktion}$$

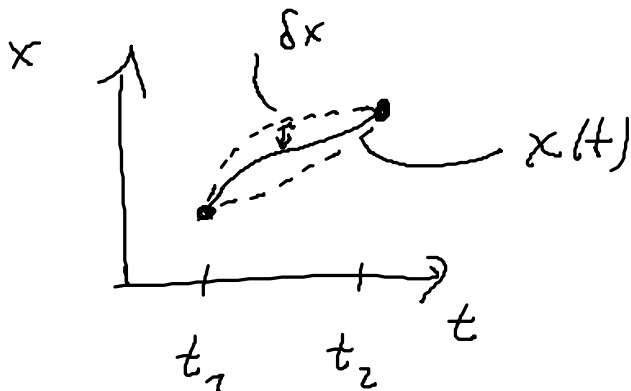
abgeleitet aus Wirkprinzip  $\delta S = 0$

dazu: Definition der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \dot{x}, t)$$

Forderung:  $\delta S = 0$ , d.h.  $S$  hat ein  
Extremum bei der realen Bahnkurve  $x(t)$   
wenn man sich vorstellt daß die Variation  $\delta x$

$x \rightarrow x + \delta x$  ausgeführt wird



jetzt: Versuchs dieses Prinzip auf Felder zu übertragen

## S.2. Das Wirkprinzip f. Felder

definieren der Wirkung f. Felder  $\Upsilon_i = \{ \varphi(\vec{r}_i, t), A_i(\vec{r}_i, t) \}$

$$S = \int dt L \left( \Upsilon_i, \Upsilon_{i|j}, \Upsilon_{i|t} \right)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$   
Feld  $\frac{\partial \Upsilon_i}{\partial x_j} \quad \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial t}$

Ort u. Zeit mglst. einheitlich behandeln

$$L(x, \dot{x}) \rightarrow L(\Upsilon, \frac{\partial \Upsilon}{\partial \epsilon}, \frac{\partial \Upsilon}{\partial x})$$

$$S = \int dt \int d^3r \underbrace{L(\Upsilon_i, \Upsilon_{i|j}, \Upsilon_{i|t})}_{\text{Lagrangendichte}}$$

Lagrangeprinzip f. Felder:  $\delta S = 0$  f. realen Felder

$$\Upsilon_i \rightarrow \Upsilon_i + \delta \Upsilon_i, \quad \Upsilon_{i|t} \rightarrow \Upsilon_{i|t} + \delta \Upsilon_{i|t}, \quad \Upsilon_{i|j} \rightarrow \Upsilon_{i|j} + \delta \Upsilon_{i|j}$$

$$S = S_0 + \delta S$$

$$\delta S = \int dt \int d^3r \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_i} \delta Y_i + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,j}} \delta Y_{i,j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,t}} \delta Y_{i,t} \right)$$

$$= \int dt \int d^3r \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_i} \delta Y_i + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,j}} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta Y_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,t}} \frac{\partial}{\partial t} \delta Y_i \right)$$

partielle Integration

$$= \int dt \int d^3r \sum_i \delta Y_i \left( \frac{\partial}{\partial Y_i} \mathcal{L} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial Y_{i,j}} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y_{i,t}} \mathcal{L} \right)$$

Annahme: Randterme verschwinden

(Felder verschwinden im  $\infty$  /

$\delta Y_i$  unabhängig

→ Lagrangegleichungen f. Felder

$$\frac{\partial}{\partial Y_i} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,j}} \quad *$$

wenn  $\mathcal{L}$  bekannt so kann die Bewegungsgl

für  $Y_i$  abgeleitet werden durch Ausrechnen von \*

Impulse f. Felder (analog zu Teilchenimpulsen)

$$\bar{\Pi}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}_i} \quad \text{analog} \quad P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}$$

in Quantenmechanik

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] \neq 0$$

$$[\hat{Y}_i, \hat{\Pi}_i]_{\pm} \neq 0$$

5.3. Die Ableitung der Maxwellgleichungen im Vakuum

Potentialer:  $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}$ ,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$Y_i = \{ \phi, A_x, A_y, A_z \}$$

$\mathcal{L} = ?$  ist das Hauptproblem

Feynman: "you have to fiddle around..."

Energie des Maxwellfelds bekannt:

$$E = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r B^2 \equiv H$$

$$L = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2 - \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r B^2$$

Ausatz aus Analogie  $H = T + U \rightarrow L = T - U$

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}, t) - \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r}, t)$$

ist die Lagrange dichte des em. Felds im Vakuum

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \vec{\nabla} \phi + \partial_t \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2$$

a) Glidg. f. skalare Potential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,j}}$$

$$0 = 0 + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 2 \left( \vec{\nabla} \phi + \partial_t \vec{A} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_{,j}} \left( \vec{\nabla} \phi + \partial_t \vec{A} \right)$$

$$0 = \epsilon_0 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_k \left( \partial_k \phi + \partial_t A_k \right) \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_{,j}} \sum_i \partial_i \phi \vec{e}_i$$

$$0 = \epsilon_0 \sum_{j,k,i} \left( \partial_j \partial_k \phi + \partial_j \partial_t A_k \right) \delta_{ij} \delta_{ki}$$

$$= \epsilon_0 \left( \sum_i \partial_i^2 \phi + \partial_t \sum_i \partial_i A_i \right) = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

aus Potential gl.

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

ist damit aus  $\mathcal{L}$  als Nullgleichung,  
im freien Raum abgeleitet

## b) Vektorpotential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,j}} \quad (*)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_e (\partial_e \phi_e + A_{e,t})^2 - \frac{1}{2\mu_0} \sum_e \left( \sum_{j,k} \epsilon_{e,jk} \partial_j A_k \right)^2$$

anwenden führt auf \*

$$0 = - \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (\text{zu Hause})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad \text{wird damit als die}$$

B-Wirbelgleichung im freien Raum gefunden



Bemerkung. Impuls zu  $A_i$  ist

$$\overline{\Pi}_{A_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i / t} = -\epsilon_0 E_i$$

in der Quantenfeldtheorie würde also dann

$$\vec{E} \rightarrow \hat{\vec{E}}, \quad A \rightarrow \hat{A}$$

$\hat{E}_i$  und  $\hat{A}_i$  nicht mehr vertauschen

$$[\hat{E}_i, \hat{A}_i] \neq 0$$

#### 5.4. Einbeziehung von Ladung und Strom

„raten“ der zugehörigen Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ :

$$L = \int d^3r \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}, t) - \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \right)$$

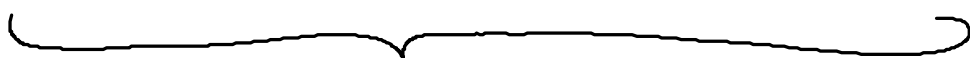
Anteil des Felds im Vakuum ( $\nu$ )

$$+ \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i) + \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i)$$

kinetische Energie  
des Teilchen

Energie im  
skalaren Potential

Energie im  
Vektorpotential



$$\underline{T = U}$$

Formüberg. mit  $\rho, j$

$$-\sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i) \Rightarrow -\int d^3r \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

$$\sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) \Rightarrow \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

(siehe letzte VL bei Energie von

Ladungen im externen Potential  $\varphi, A$ )

a) skalares Potential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{1k}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{1j}}$$

$$-\rho(\vec{r}) = 0 - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

→ Quelle gleich d. d. Felds wenn Ladungen

vorliegen:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

## b) Vektorpotential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{0,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{0,j}}$$

$$j_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 E_0 + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_0$$

Man erhält also die B-Feld Wirbelgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

c) die beiden anderen Maxwellgleichungen findet man über die Potentiale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad | \quad \vec{\nabla} \cdot$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad | \quad \vec{\nabla} \times$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

d) analoge Herleitung der Bewegungsgleichungen  
f. die Teilchen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad \rightarrow \quad m \ddot{\vec{r}}_i = q_i (\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i)$$

dies ergibt die Newtongleichung mit Lorentzkraft