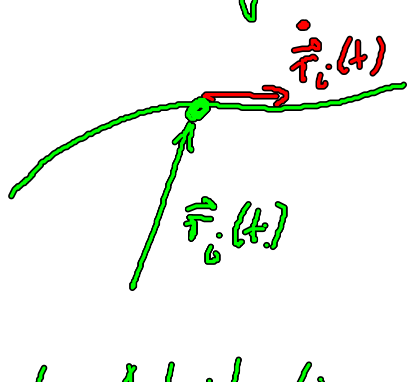
Das Poyntingtheorem beschreibt die zeitliche Änderung der Energiedichte des elektromagnetischen Felds w_{em} im Raumpunkt $\vec{r}$ zur Zeit t durch Zu- und Abstrom der Energie ($\vec{\nabla}\cdot\vec{S} \hat{=}$ Quelle des Energiestroms $\vec{S}$ = Poyntingvektor). Verluste werden durch Leistungsenergiedichte $P = \vec{j}\cdot\vec{E}$ beschrieben.

Verluste treten auch bei j = konstant auf.

$$\partial_t w_{em} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S} - P$$

Deutung des $P = \vec{j}\cdot\vec{E}$-Terms im Poyntingtheorem



berechnen der Arbeit die em. Feld an den LT verrichtet

$$A = \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot \vec{f}_L(r_i, \dot{\vec{r}}_i, t) =$$

$$= \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot q_i \left(\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i \right)$$ Index i: Feld am Ort des Teilchens i

$$A = \int d^3r \sum_i \underbrace{\int d\vec{r}_i \cdot q_i \left(\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i \right)}_{*} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$* = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{d\vec{r}_i}{dt'} \cdot q_i \left(E_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i \right)$$

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i \right) \to 0$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \, q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{E}_i$$

Magnetfeld verrichtet keine Arbeit

$$P' = \dot{A} = \int d^3r \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{E}(r_i, t) \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Leistung

$$= \int d^3r \, \underbrace{\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(r, t)}_{P}$$

$P = \vec{j} \cdot \vec{E}$ ist also die Leistungsdichte.

5) Lagrangeformulierung f. elektromagnetische Felder

Ziel: Ableitung der Maxwellgleichungen im Lagrangeformalismus

einheitliche Formulierung, später: Quantenmechanik

5.1) Erinnerung an klassische Mechanik

a) Newtonformalismus: Teilchen im Potential $U(x)$

$$m\ddot{x} + \partial_x U(x) = 0 \qquad x: \text{Bahnkurve } x(t)$$

b) Lagrangeformalismus: $L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad L \text{ Lagrangefunktion}$$

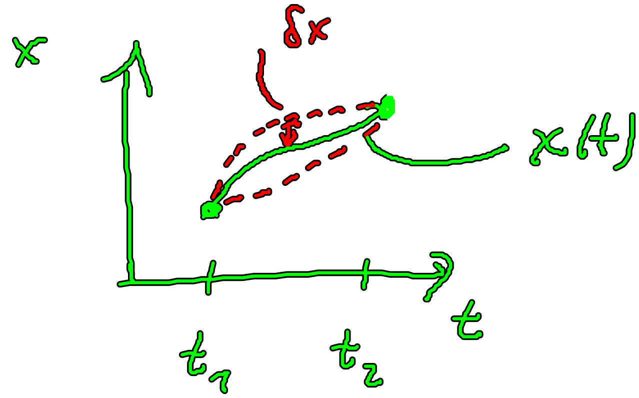
abgeleitet aus Wirkprinzip $\delta S = 0$

dazu: Definition der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, \dot{x}, t)$$

Forderung: $\delta S = 0$, d.h. S hat ein Extremum bei der realen Bahnkurve $x(t)$ wenn man sich vorstellt daß die Variation δx

$x \to x + \delta x$ ausgeführt wird



jetzt: Versuche dieses Prinzip auf Felder zu übertragen

5.2. Das Wirkprinzip f. Felder

definieren der Wirkung f. Felder $Y_i = \{\varphi(\vec{r},t), A_i(\vec{r},t)\}$

$$S = \int dt\, L(\underset{\text{Feld}}{Y_i}, \underset{\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}}{Y_{i|j}}, \underset{\frac{\partial Y_i}{\partial t}}{Y_{i|t}})$$

Ort u. Zeit mglst. einheitlich behandeln

$$L(x, \dot{x}) \rightarrow L(Y, \partial_t Y, \partial_x Y)$$

$$S = \int dt \int d^3r\, \underbrace{\mathcal{L}(Y_i, Y_{i|j}, Y_{i|t})}_{\text{Lagrangedichte}}$$

Lagrangeprinzip f. Felder: $\delta S = 0$ f. realen Felder

$$Y_i \rightarrow Y_i + \delta Y_i, \quad Y_{i|t} \rightarrow Y_{i|t} + \delta Y_{i|t}, \quad Y_{i|j} \rightarrow Y_{i|j} + \delta Y_{i|j}$$

$$S = S_0 + \delta S$$

$$\delta S = \int dt \int d^3r \sum_i \left(\partial_{Y_i} \mathcal{L}\, \delta Y_i + \sum_j \partial_{Y_{i|j}} \mathcal{L}\, \delta Y_{i|j} + \partial_{Y_{i|t}} \mathcal{L}\, \delta Y_{i|t} \right)$$

$$= \int dt \int d^3r \sum_i \left(\partial_{Y_i} \mathcal{L}\, \delta Y_i + \sum_j \partial_{Y_{i|j}} \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta Y_i + \partial_{Y_{i|t}} \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t} \delta Y_i \right)$$

partielle Integration

$$= \int dt \int d^3r \sum_i \delta Y_i \left(\frac{\partial}{\partial Y_i} \mathcal{L} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial Y_{i|j}} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y_{i|t}} \mathcal{L} \right)$$

Annahme: Randterme verschwinden
(Felder verschwinden im ∞)

δY_i unabhängig

$\rightarrow$ Lagrangegleichungen f. Felder

$$\frac{\partial}{\partial Y_i} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i|t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i|j}} \qquad *$$

wenn $\mathcal{L}$ bekannt so kann die Bewegungsgl.
für Y_i abgeleitet werden durch Ausrechnen von *

Impulse f. Felder (analog zu Teilchenimpulsen)

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i,t}} \quad \text{analog} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}$$

in Quantenmechanik

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] \neq 0$$

$$[\hat{Y}_i, \hat{\Pi}_i]_\pm \neq 0$$

5.3. Die Ableitung der Maxwellgleichungen im Vakuum

Potentiale: $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$Y_i = \{\phi, A_x, A_y, A_z\}$$

$\mathcal{L} = ?$ ist das Hauptproblem

Feynman: „you have to fiddle around..."

Energie des Maxwellfeldes bekannt:

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, B^2 \equiv H$$

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, E^2 - \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, B^2$$

Ansatz aus Analogie $H = T + U \rightarrow L = T - U$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec{r},t) - \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r},t)$$

ist die Lagrangedichte des em. Felds im Vakuum

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\vec{\nabla}\phi + \partial_t \vec{A}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)^2$$

a) Gleichg. f. skalar Potential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,j}}$$

$$0 = 0 + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2 \left(\vec{\nabla}\phi + \partial_t \vec{A}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_{,j}} \left(\vec{\nabla}\phi + \partial_t \vec{A}\right)$$

$$0 = \varepsilon_0 \sum_j \partial_j \sum_k \left(\partial_k \phi + \partial_t A_k\right) \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_{,j}} \sum_i \partial_i \phi \, \vec{e}_i$$

$$0 = \varepsilon_0 \sum_{jki} \left(\partial_j \partial_k \phi + \partial_j \partial_t A_k\right) \delta_{ij} \, \delta_{ki}$$

$$= \varepsilon_0 \left(\sum_i \partial_i^2 \phi + \partial_t \sum_i \partial_i A_i\right) = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

aus Potentialgl.

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

ist damit aus $\mathcal{L}$ als Quellengleichung im freien Raum abgeleitet

b) Vektorpotential

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i|t}}} + \underbrace{\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i|j}}} \quad (*)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_e \left(\partial_e \phi_e + A_{e|t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \sum_e \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ejk} \partial_j A_k \right)^2$$

anwenden führt auf $*$

$$\underbrace{0} = \underbrace{- \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \vec{E}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}} \quad \text{(zu Hause)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$ wird damit als die

B-Wirbelgleichung im freien Raum gefunden

Bemerkg. Impuls zu A_i ist

$$\Pi_{A_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i/t}} = -\varepsilon_0 E_i$$

in der Quantenfeldtheorie würde also dann

$$E \to \hat{E}, \quad A \to \hat{A}$$

$\hat{E}_i$ und $\hat{A}_i$ nicht mehr vertauschen

$$[\hat{E}_i, \hat{A}_i] \neq 0$$

5.4. Einbeziehung von Ladung und Strom

„raten" der zugehörigen Lagrangedichte $\mathcal{L}$:

$$L = \underbrace{\int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r,t) - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r},t) \right)}_{\text{Anteil des Felds im Vakuum } (V)}$$

$$+ \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \sum_i q_i \varphi(r_i) + \sum q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{A}(r_i)$$

kinetische Energie der Teilchen

Energie im Skalarpotential

Energie im Vektorpotential

$T - U$

Formulierg. mit ρ, j

$$-\sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i) \Longrightarrow -\int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})$$

$$\sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) \Longrightarrow \int d^3r\, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

(siehe letzte VL bei Energie von Ladungen in externem Potential φ, A)

a) skalares Potential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,j}}$$

$$-\rho(\vec{r}) = 0 - \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$\rightarrow$ Quellgleichg. d. el. Felds wenn Ladungen vorliegen: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

b) Vektorpotential

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{0/t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{0/j}}$$

$$j^0 = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 E_0 + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_0$$

Man erhält also die B-Feld Wirbelgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

c) die beiden anderen Maxwellgln findet man über die Potentiale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad | \vec{\nabla} \cdot$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \partial_t A \quad | \vec{\nabla} \times$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}}$$

d) analoge Herleitung der Bewegungsgleichungen f. die Teilchen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \longrightarrow m\ddot{\vec{r}}_i = q_i(\vec{E}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_i)$$

dies ergibt die Newtongleichung mit Lorentzkraft