Ideen f. Ableitung der Bewegungsgleichung f. Elektronenflüssigkeit
(konkrete Durchführung: Übungszettel)

ausgehend von der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m$, $\underbrace{\vec{j}_m = \rho_m \vec{u}_m}_{\text{Ansatz}}$

auf 2 Wegen $\partial_t (u_i \rho)$ berechnen

$$(1) = \partial_t (u_i \rho) = \dots$$

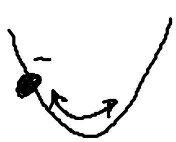
$$(2) = \partial_t (j_i) = \partial_t \left\langle \sum_n q \, \dot{r}_{ni} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle$$

(1) = (2) verwenden und die Faktorisierung von Mittelwerten:

$$\langle AB \rangle = \left\langle \left(\langle A \rangle + \delta A \right) \left(\langle B \rangle + \delta B \right) \right\rangle$$
$$\simeq \langle A \rangle \langle B \rangle + \text{Korrelatoren}$$

4.2. Makroskopische Dipoldichte

klassische Elektronen, an Atomkern harmonisch gebunden



„gebundene Elektronen" n-ter Oszillator

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{d}_n(t) \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$\ddot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + \gamma \dot{\vec{P}}(r, t) + \omega_0^2 \vec{P}(r, t) = \frac{n_0 q^2}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Oszillatorgleichung für das Feld der Dipoldichte im elektrisch Feld

$\vec{P}$ wirkt über Maxwellgln zurück auf $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{P}(r,t)} \longleftarrow \vec{E}(r,t)$$

polarisierbares Medium

Maxwellgleichung + Oszillatorgleichung

ω_0 : Schwingungsfrequenz der El. um Kernen

n_0 : Anzahldichte der Dipole (Dipolzahl / Volumen)

q : Elektronladung, m - Elektronmasse

<u>Einfachstes Anwendung</u>: Wo kommt die dielektrische Konstante im Material her?

statische Situation: $\vec{E}$ soll nicht von Zeit abhängen

$\rightarrow$ stationäre Lösung ist relevant

$$\vec{P} = \frac{n_0 q^2}{m\,\omega_0^2}\,\vec{E} \qquad \vec{P} \sim \vec{E} \text{ in statische Fall}$$

Wie bestimmt man ε?

$$\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} = \varepsilon_0\, \varepsilon\, \vec{E} \Rightarrow \varepsilon$$

unserer Definition

$$\varepsilon = 1 + n_0 \frac{q^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0}$$

Damit ist ε berechenbar aus einem einfachen Modell

<u>Idee zur Ableitung der Bewegungsgleichung f. Dipoldichte</u>

$$\vec{d}_n = \sum_j q_{j(n)} \vec{r}_{jn}(t) \quad \text{Dipolmoment des } n\text{-ten Moleküls}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{jn} + \omega_0^2 r_{jn} + \underbrace{\gamma}_{\text{phänomenologisch}} \dot{\vec{r}}_{jn} = \frac{q}{m}\underbrace{\left(\vec{E}_n + \dot{\vec{r}}_{jn} \times \vec{B}_n\right)}_{\text{ebene Wellen, (Näherung ist mgl.: } \vec{B} \to 0)}$$

dann beachte die Definition von $\vec{d}_n$ und damit Gleichung für $\vec{P}(r,t)$ herleiten

(Übungsblatt 3)

5 Grenzbedingungen für makroskopische elektromagnetische Felder

5.1 Integraldarstellungen der Maxwellgleichungen

a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_m \longrightarrow \oiint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{D} = Q_m$

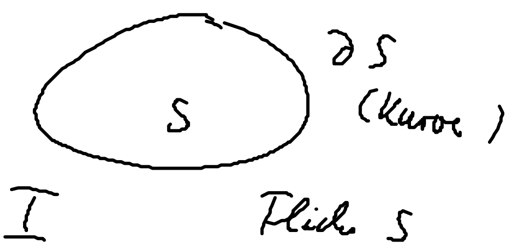
Nettofluß des D-Felds aus V entspricht der umschlossenen Gesamtladung Q

b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \oiint d\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

Nettofluß f. magnetisch Feld aus geschlossener OF ist 0

$\longrightarrow$ es gibt keine magnetische Ladungen

c) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t\vec{D}$



$\oint_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{H} = \iint_S d\vec{A}\cdot(\vec{j}_m + \partial_t\vec{D}) = I$

Ampere-Maxwell Gesetz: Linienintegral über $\vec{H}$ ergibt den Gesamtstrom der durch die umschlossene Fläche fließt

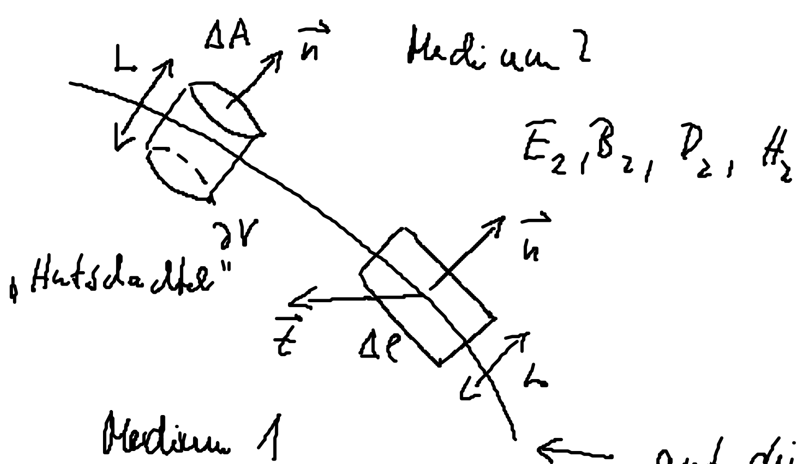
d) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \longrightarrow \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\partial_t \int_S d\vec{A} \cdot \vec{B}$

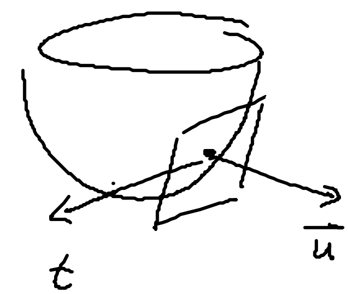
Faraday-Gesetz: Induzierte elektromagnetische Kraft (Spannung) ist proportional zur Zeitableitung des magnetischen Flusses $\int_S d\vec{A} \cdot \vec{B}$.

(hier muß, wenn verwendet, eine Leiterschleife festliegen)

5.2 Felder an Grenzflächen

integrale Form der Maxwellgleichungen um Stetigkeitsbedingg. an Grenzfläche 2er Medien zu formulieren.





← auf diesen Rand interessiert uns Verhalten

$\vec{n}$: Normalenvektor $\perp$ auf der Oberfläche

$\perp$ zur Tangentialebene

Normale der Schleife $\hat{=} \vec{t}$, ist tangential zur Oberfläche

Felder werden nach $\vec{n}$ und $\vec{t}$ zerlegt

$$\vec{X} = \underbrace{X_n \vec{n} + X_t \vec{t}}$$

Projektion aus und in der Ebene

Auswertung der integrale Maxwellgleichungen f. $L \to 0$

Um Grenzbedingungen zu formulieren, Felder als endlich gefordert

a) $\oint d\vec{A} \cdot \vec{D} = \int dV \rho_m(r)$ (Hutschachtel Radius R_0)

$$\underbrace{2\pi R_0 L}_{\text{Oberfläche des abgerollten Mantels}} \underbrace{\bar{D}}_{\text{Mittelwert nach Mittelwertsatz}} + \underbrace{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n}\,\Delta A}_{\text{Stirnseite}} = \begin{cases} \Delta A L \rho & \text{wenn } \rho \text{ endlich} \\ \Delta Q \dfrac{\Delta A}{\Delta A} & \text{wenn } \rho\ \infty \end{cases}$$

für endliche Ladungsdichte: $L \to 0$

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n} = \vec{D}_1 \cdot \vec{n} \quad , \quad D_{1n} = D_{2n}$$

für ungleich unendliche Ladungsdichte $L \to 0$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma \quad , \quad \underbrace{\sigma = \frac{dQ}{dA}}$$

Flächenladungsdichte auf der Grenzschicht

Die Normalenkomponente von $\vec{D}$ springt an einer Grenzfläche um die makroskopische Flächenladungsdichte σ (Metall). In Dielektrika ist die Normalenkomponente von $\vec{D}$ stetig an der Grenzfläche.

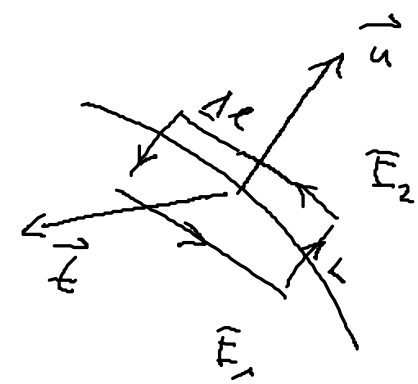
b) analoge Rechnung:

Die Normalenkomponente von $\vec{B}$ ist an dem Übergang zweier Grenzflächen stetig:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \qquad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{n} = 0$$

jetzt zum E, H - Feld

c) $$\underbrace{\oint_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{E}} = -\iint d\vec{A}\cdot\partial_t\vec{B}$$



Linienintegrale $\perp$, $\parallel$ zur Grenzschicht

rechte Seite wird Null für $L \to 0$ nach Mittelwertsatz

→ i) $\perp$ zur Oberfläche: auch hier f. $L \to 0$ kein Beitrag nach Mittelwertsatz

ii) $\parallel$ zu Oberfläche entlang von Δl

$$0 + \text{„}\parallel\text{"} = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Länge des}\\ \text{Integrals}}}{\Delta l}\, \vec{E}_2 \cdot \underbrace{(\vec{t} \times \vec{n})}_{\substack{\text{Projektion auf}\\ \text{Kurve}}} - \Delta l\, \vec{E}_1 (\vec{t} \times \vec{n}) = 0$$

Laufrichtg. beachten

Zyklisch Vertauschg.

$$(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{t} \cdot (\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ an 2 Grenzfläche ist stetig

d) $$\underbrace{\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{H}}\; = \iint_S d\vec{A} \left(\vec{j}_m + \partial_t \vec{D} \right) = \Delta I$$

Strom der durch Schleife

analog E-Feld (c)

an der Grenzfläche fließt

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\,\Delta l = \begin{cases} 0 & \text{f. endliches } j_m \\ \Delta l \dfrac{\Delta I}{\Delta l} & \text{f. möglicherweise } \infty\ \vec{j}_m \end{cases}$$

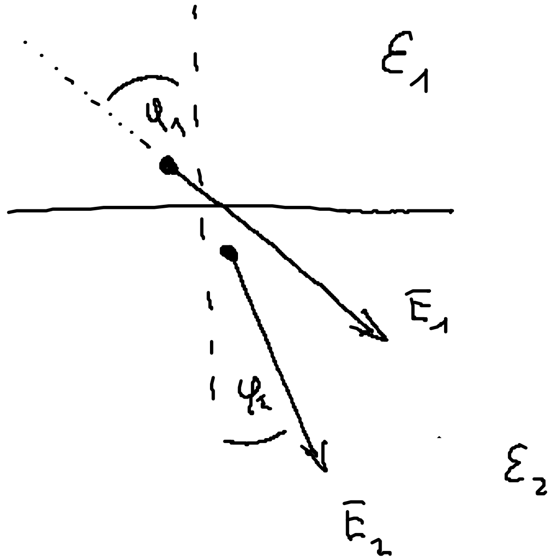
$$\vec{t}\cdot\vec{K} = \frac{\Delta I}{\Delta l}$$ = Linienstromdichte auf der Grenzfläche

$$\vec{t}\cdot\left(\vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\right) = \vec{t}\cdot\vec{K}$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

Die Tangentialkomponente von H springt um die vorliegende Linienstromdichte $\vec{K}$, $\vec{K}$ ist 0 in Dielektrika, hier ist die Tangentialkomponente von H stetig ($H_{t_1} = H_{t_2}$).

<u>Beispiel</u> Brechung der Feldlinien im Dielektrikum



$D_{n_1} = D_{n_2} \rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\varphi_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\varphi_2$

$E_{t_1} = E_{t_2} \rightarrow E_1 \sin\varphi_1 = E_2 \sin\varphi_2$

$\left(\vec{D}_i = \varepsilon_i \varepsilon_0 \vec{E}_i \quad i = 1, 2 \right)$

$$\underbrace{\overbrace{\frac{\tan\varphi_1}{\tan\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$$

f. kleine Winkel:

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

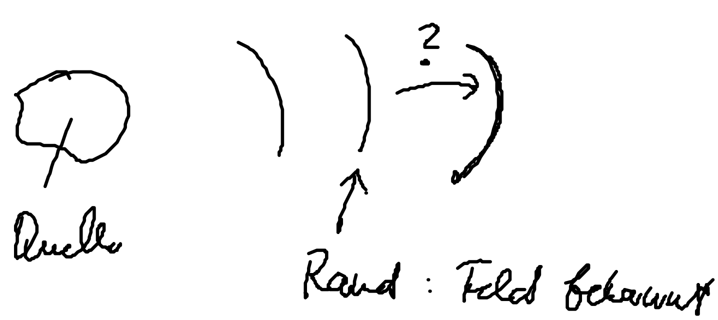
Die Feldlinien werden bei Übergang von dichtem zu dünnem Material $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ zum Lot hin gebrochen

Achtg: $\vec{k}$ - Vektor bei Licht ist $\perp$ auf $\vec{E}$.

III Elektromagnetische Felder im Vakuum

Motivation: Licht, Radio, etc.

Berechng. der Felder außerhalb von Quellen aus Rand- und Anfangswertprobleme mglich?



1. Wellengleichung im Vakuum

aus $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t B$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t E$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{\nabla}\times B$$

$$\nabla(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} = 0$$ Wellengleichung gilt f. jede Komponente

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{B} = 0$$ gilt analog

im Gegensatz zu gewöhnlichen Dgls gibt es eine wesentlich höhere Lösungsmannigfaltigkeit

- gewöhnliche Dgl: n-ter Ordnung $\rightarrow$ n parametrische Schar (Fundamentalsystem)
- partielle Dgl.: im allgemeinen treten n unbestimmte Funktionen auf (n Ordnung der Dgl - Ableitg.) mit (p-1) Variable (p ist Zahl der unabhängigen Variable in Dgl.)

Wellengleichung in 1d: $x, t, \partial_x^2, \partial_t^2 \rightarrow n = p = 2$

Lsg: $f(x-ct) + g(x+ct)$

Hausnummer !

2. Spektralzerlegung des E-Felds

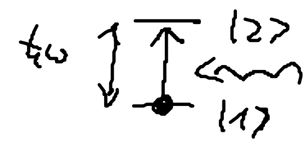
Spektralanalyse eines Felds findet durch Fourierzerlegung statt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \vec{E}(\vec{r},\omega) \, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \vec{E}(\vec{r},t) \, e^{i\omega t}$$

in Messung wird das Powerspektrum $|\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2$ bestimmt,

kommt aus Quantentheorie der Photodetektion



d.h. i.a. ist es das Ziel, Powerspektrum zu bestimmen.