## 3. Ebene Wellen als Fundamentallösungen

Fundamentallösungen: Satz von Basisfunktionen nach denen eine Lösung entwickelt werden kann,
z.B. ebene Wellen in kartesischen Koordinaten
Kugel und Hankelfunktionen in Kugelkoord.

ebene Wellen:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wird gemessen}}}{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(k)t)}\vec{E}_k\right\}$$

$$\omega = \omega(\vec{k}) = c|k|$$

ist die Dispersionsrelation im Vakuum

### a) Orthogonalitätseigenschafte:

**Ziel**: Rand- und Anfangswertprobleme mit Satz von Fundamental-lösg. anzugeben

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$$

$$i\vec{k}\times\vec{E}_k = i\omega\vec{B}_k, \quad i\vec{k}\times\vec{B}_k = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_k$$

$$\underbrace{\vec{k}\times\vec{E}_k = \omega\vec{B}_k, \quad \vec{k}\times\vec{B}_k = -\frac{\omega}{c^2}E_k}$$

$\Rightarrow$ aus diesen 2 Kreuzprodukten folgert man

daß $\vec{k}$, $\vec{E}_k$, $\vec{B}_k$ einen Satz orthogonaler

Vektoren bilden

Der Betrag von B und E unterscheidet sich um c:

$$|B_k| = \frac{|E_k|}{c}$$

(Bedeutg. relativistische Effekte bei Magnetfeld

$$v\,|B_k| \sim \frac{v}{c}\,|E_k|$$

E ist wichtiger f. $v \ll c$ als B für

Teilchbewegg in Feld einer ebenen Welle)

<u>Nachtrag</u>

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) =$$

$$\varepsilon_{\ell m n}\, \vec{e}_\ell \underbrace{\partial_m}_{\partial_{x,y,z}\,(\hat{e}_m)} \left(E_{kn}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\right) =$$

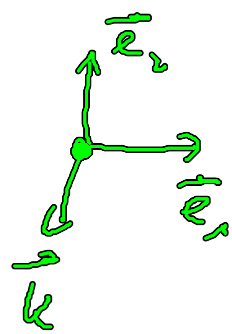
$$\varepsilon_{\ell m n}\, \vec{e}_\ell\, E_{kn}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \partial_m \left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right) =$$

$$\varepsilon_{\ell m n}\, \vec e_\ell\, E_{kn}\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\, i k_m = i\vec k \times \vec E_k\, e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

## b) Polarisationseigenschaften (bzw., wie $\vec E_k$ im Raum steht)

allgemeinste Darstellg. der Fundamentallösung:

$$\vec E_k\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)} = \left(E_1 \vec e_1 + E_2 \vec e_2\right) e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$$




wo 2 orthogonale Einheitsvektoren in Ebene $\perp \vec k$ sind wichtig zur $\vec E_k$ Darstellung

$$= \left(|E_1|\, e^{i\phi_1}\vec e_1 + |E_2|\, e^{i\phi_2}\vec e_2\right) e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$$

$$= \left(|E_1|\,\vec e_1 + |E_2|\, e^{i(\phi_2-\phi_1)}\vec e_2\right) e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t \cancel{+\phi_1})}$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$$

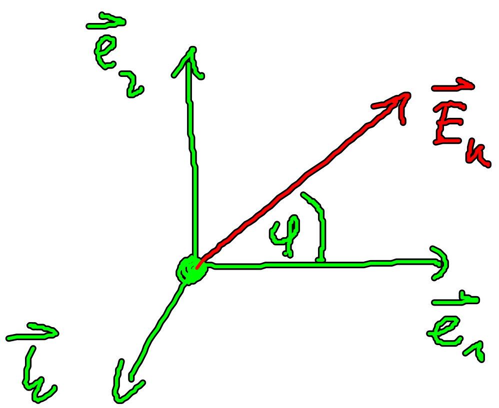
$\phi_1$ kann immer zu Null gewählt werden,

z.B. durch Wahl des Zeitnullpunkts

meßbar:

$$\mathrm{Re}\,(\text{Feld}) = \begin{pmatrix} 2 E_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ 2 E_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \Delta\phi) \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1$ bzw $\vec{e}_2$ Komponente in Spaltenschreibweise f. $\vec{E}$




$\varphi$ ist der $\sphericalangle$ unter dem das E-Feld (Fourierkomponente) bzgl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ steht

$$\varphi = \arctan\left( \frac{E_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \Delta\phi)}{E_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right)$$

Welche Bgl. hat der Feldvektor $\vec{E}_k$ ?

1. Fall: linear polarisiert $\Delta\phi = 0$

$\rightarrow \varphi =$ zeitlich und räumlich konstant

$\rightarrow \vec{E}_k$ steht fest im Raum $\forall$ Zeiten

2. Fall zirkular polarisiert $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, $E_1 = E_2$

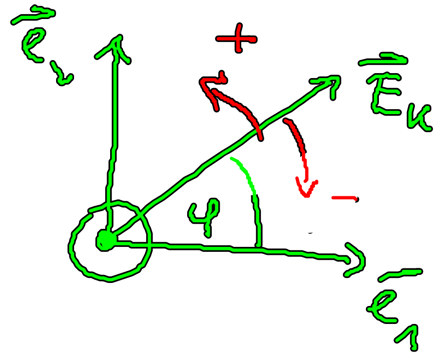
$$\rightarrow \varphi = \pm(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

(weil cos in Zähler → sin ⇒ artg. (tg ...))

→ $\vec{E}_{K}$ Vektor rotiert auf einem Kreis um die Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = c|\vec{k}|$. für einen festgehaltenen Ort $\vec{r}$.

umgekehrtes Argument im Ort, wenn Zeit festgehalten wird.

entsprechend der Richtg. bzgl. $\vec{k}$ in die sich der Winkel mit fortschreitender Zeit dreht nennt man das Feld rechts (+) oder links (−) zirkular polarisiert




beide Lösungen sind linear unabhängig:

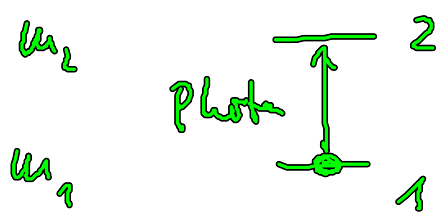
$$\to \vec{E}_n^{\pm} = E_1 \left(\vec{e}_1 + \underbrace{e^{\pm i\frac{\pi}{2}}}_{\pm i}\, \vec{e}_2\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$= E_1\, \vec{e}_\pm\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{e}_\pm = \vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2$$

sind links und rechts zirkular polarisierte Einheitsvektoren

<u>wichtig</u> $\pm$ Polarisation f. die Anregung von bestimmten Eigenzuständen des H-Atoms und der Auswahlregel in Optik

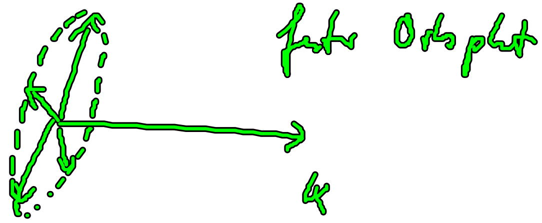



$\longrightarrow \Delta m = 0, \pm 1$

die Übergänge spalten im Magnetfeld auf

$\longrightarrow$ $\pm$ relevant (Zeemaneffekt)

## 3. Fall: elliptisch polarisiert




allgemeiner Fall: elliptische Polarisation

(keine Einschränkung an $E_1, E_2, \Delta\phi$)

Beweis erfordert typischerweise Hauptachsentrafo auf Ellipsengleichung. mache 1 Bsp:

$$\mathrm{Re}\left\{ \left( E_1 \vec{e}_1 - E_2 i \vec{e}_2 \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} =$$

$$\underbrace{E_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}_{E_x} \vec{e}_1 + \underbrace{E_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}_{E_y} \vec{e}_2 = \vec{E}$$

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1$$

$\longrightarrow$ Ellipsengleichg. f. Feldkomponenten

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Modenzerlegung eines beliebigen E-Felds:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} \vec{e}_{k\lambda} E_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

f. jedes $\vec{k}$ braucht man 2 Vektoren $\perp$ zu $\vec{k}$ um

das Feld aufzuspannen

(ii) Polarisationseigenschaften sind wichtiges Charakteristikum

von Quellen elektromagnetischer Strahlung

z.B. verschränkte Photonquellen

(2 Photonen in quantenmechanischem Überlagerungszustand

aus $+_1$ - Polarisation)

(iii) durch die sogenannten Stokesparameter $S_i$

kann die Polarisation einer $\vec{k}$-Fundamental-

lösung festgelegt werden

„Principles of Optics" Max Born, Emil Wolf

(ohne Beweis)

## 4. Entwicklung des Felds nach Hankel/Kugelfunktionen

Wellengleichung in Kugelkoordinaten: $\Delta E_i - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 E_i = 0 \quad \forall i$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r}}_{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE)} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{\partial E}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}E = 0$$

Ansatz: $E(r,t) = E(r)\cdot e^{-i\omega t}$ f. 1 feste Frequenz

und 1 Vektorkomponente des Gesamtfelds $\vec{E}$.

Ansatz ähnlich wie bei Schrödingergleichung:

$$E(r,\vartheta,\varphi) = E = \sum_{lm} \underbrace{R_l(r)}_{\text{gesucht}} \underbrace{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}_{\substack{\text{Kugelfunktionen} \\ \text{(vollständig)}}}$$

separiert Winkel u. Radialanteil:

$$\vec{L}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}, \quad \vec{L} = \frac{\vec{r}\times\vec{\nabla}}{i}$$

$\vec{L}$ ist drehimpulsartiger Operator

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R_l = k^2 R_l, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

mal $r$, neue Koordinate $\xi = k\cdot r$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\xi^2}\right)(\xi R_\ell) = (\xi R_\ell)$$

Die Lösungen dieser Dgl. sind die Hankelfunktionen

z.B.: $\ell = 0$, Hankelfunktion 0-ter Ordnung

$$(\xi R_0) + \partial_\xi^2 (\xi R_0)$$

$$\rightarrow \underbrace{R_0(\xi = kr) = a_1 \frac{e^{+i\xi}}{\xi} + a_2 \frac{e^{-i\xi}}{\xi}}_{\text{beschreiben ein- und auslaufende Welle}}$$

$$R_0 \simeq \frac{e^{-i\omega t \pm ikr}}{kr} \quad \text{Kugelwellen}$$

<u>allgemein</u>: $R_\ell = a_1 h_\ell(kr) + a_2 h_\ell^*(kr)$

können nach Ein- und Auslaufend Welle charakterisiert werden

$\rightarrow$ damit ist $E(\vec{r},t) = \sum_{m,\ell} R_\ell(r)\, Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$

nach einem vollständigen System entwickelt.

Zur Entwicklung nach Eigenfunktionen wird Identität benötigt

a) im Vakuum gilt $(\Delta + k^2)\vec{r}\cdot\vec{E} = 0$, weil

$$\nabla^2(\vec{r}\cdot\vec{E}) = \partial_i^2(x_j E_j) = \partial_i(\delta_{ij} E_j + x_j \partial_i E_j)$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0} + \vec{r}\cdot\Delta\vec{E}$$

$$\nabla^2(\vec{r}\cdot\vec{E}) = \vec{r}\cdot\Delta\vec{E} \quad \checkmark$$

$$+ \; k^2\,\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$\underbrace{(\nabla^2 + k^2)\,\vec{r}\cdot\vec{E}}_{=0} = \vec{r}\,\underbrace{(\Delta\vec{E} + k^2\vec{E})}_{=0} \quad \checkmark$$

Beziehung stimmt also

$$\boxed{\begin{aligned} \rightarrow \vec{r}\cdot\vec{E} &= \sum_{lm}\left(a_{lm}\, h_l(kr) + b_{lm}\, h_l^*(kr)\right) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \\ \vec{r}\cdot\vec{B} &= \sum_{l'm'}\left(a_{l'm'}\, h_{l'}(kr) + b_{l'm'}\, h_{l'}^*(kr)\right) Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi) \end{aligned}}$$

b) andererseits:

$$i\omega \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{E} \quad \text{(Maxwellgleichg.)}$$

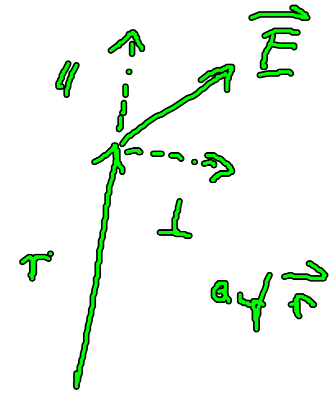
$$ck\, \vec{r}\cdot\vec{B} = \frac{1}{i}\,\vec{r}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \underbrace{\frac{1}{i}\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\right)}_{\vec{L}}\cdot\vec{E} = \vec{L}\cdot\vec{E}$$

$$\boxed{ck\, \vec{r}\cdot\vec{B} = \vec{L}\cdot\vec{E}}$$

c) führen Entwicklungskoeffizienten ein $E_{lm}$, $B_{lm}$ und unterteilen das Gesamtfeld in 2 Teile

(i) aus „magnetischen Multipolen"

$$\vec r \cdot \vec E^M_{lm} = 0 \ , \quad \vec r \cdot \vec B^M_{lm} \neq 0$$




(ii) aus „elektrische Multipole"

$$\vec r \cdot \vec B^E_{lm} = 0 \ , \quad \vec r \cdot \vec E^E_{lm} \neq 0$$

Überlagerung aus beiden Anteilen soll das Gesamtfeld ergeben

betrachte zunächst M-Felder

$$\Rightarrow \quad \vec r \cdot \vec B^M_{lm} = \frac{l(l+1)}{ck}\, g_l(kr)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \qquad (a)$$

rausgezogen wegen Schönheit der Rechnung.

$\underbrace{\text{irgendein Konstante mal}}_{\text{noch unklar}}$ Hankel

aus $ck\, \vec r \cdot \vec B = \vec L \cdot \vec E$ (b)

$$\Rightarrow \quad \vec L \cdot \vec E^M_{lm} = \underbrace{\underline{l(l+1)}\, g_l(kr)\, Y_{lm} = \underline{\vec L \cdot \vec L}}_{\text{Eigenwertproblem mit Kugelfunktionen}}\, g_l(kr)\, Y_{lm}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}^{M}_{lm} = g_l(kr)\,\vec{L}\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad (\leftarrow)$$

$$\vec{B}^{M}_{lm} = -\frac{i}{ck}\,\vec{\nabla}\times\vec{E}^{M}_{lm} \quad \text{(aus Maxwellgl.)}$$

<u>analog</u>: f. E-Indizes

$$\Rightarrow \quad \vec{B}^{E}_{lm} = f_l(kr)\,\vec{L}\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$\vec{E}^{E}_{lm} = \frac{ic}{k}\,\vec{\nabla}\times B^{E}_{lm}$$

$f_l$: Hankelfkt und Vorfaktor

gesamte Superposition lautet:

$$\vec{E} = \sum_{lm}\left(\frac{ic}{k}\,a^{E}_{lm}\,\vec{\nabla}\times f_l(kr)\,\vec{L}\,Y_{lm} + a^{M}_{lm}\,g_l(kr)\,\vec{L}\,Y_{lm}\right)$$

$$\vec{B} = \sum_{lm}\left(\frac{-i}{ck}\,a^{M}_{lm}\,\vec{\nabla}\times g_l(kr)\,\vec{L}\,Y_{lm} + a^{E}_{lm}\,f_l(kr)\,\vec{L}\,Y_{lm}\right)$$

Das Problem der Bestimmung der Felder ist auf die Bestimmung der Koeffizienten $a^{E/M}_{lm}$ reduziert.

Bedeutg. wird bei Randwertproblem wichtig.

→ Feld im ganzen Raum