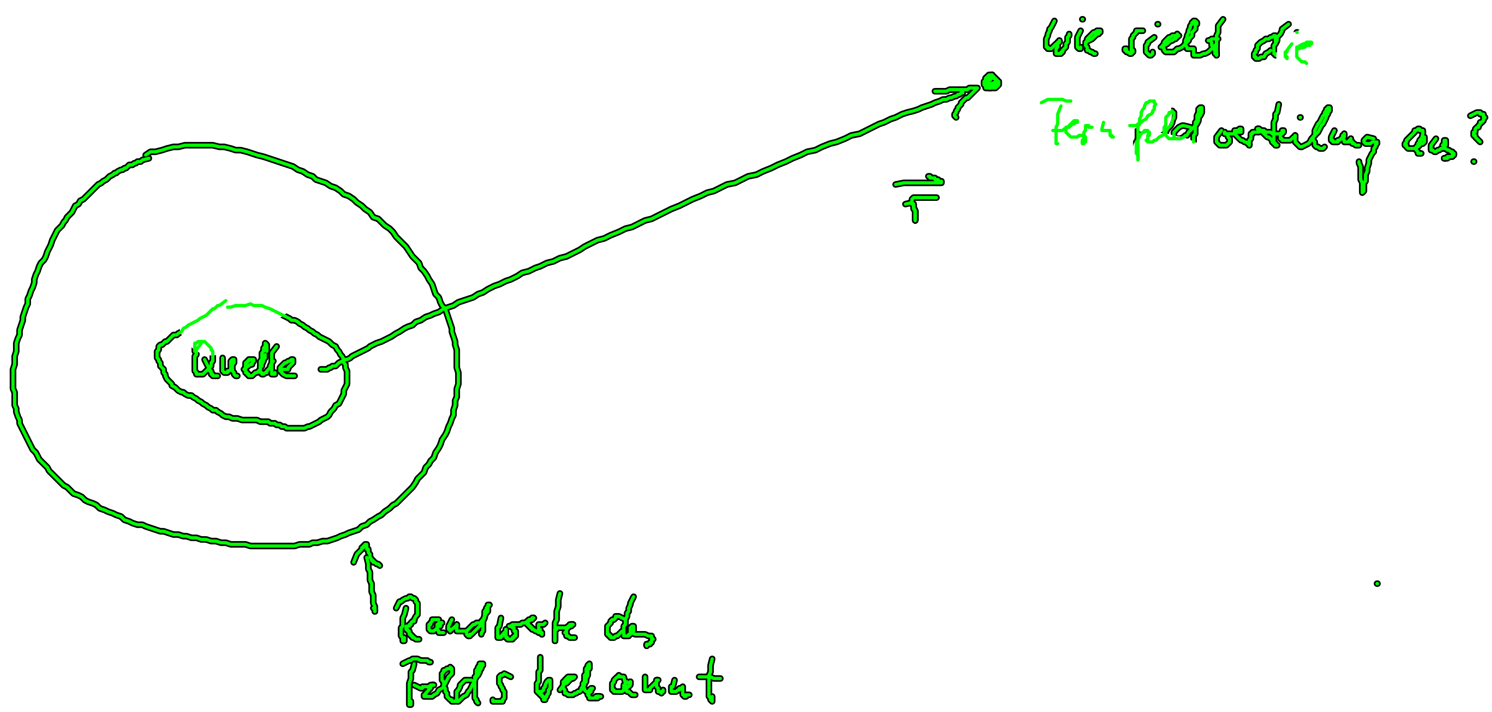
5. Randwertaufgabe und Bestimmung eines Fernfelds

Ziel: Berechnung des Fernfelds einer Quelle aus gegebenen Randwerten



Fernfeld $\lambda \ll |\vec{r}|$ – Feld in einer Entfernung groß zur Wellenlänge $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ der emittierten Strahlung

wann gilt das – wann ist man im Fernfeld?

Faustregel ab $5 \cdot \lambda$ bereits die folgende Näherung gut

Annahmen (für unsere Formeln f. $\vec{E}, \vec{B}$ aus letzter VL zu vereinfachen)

a) Fernfeld: $h_e^{(+)} \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{+ikr}}{r}$ f. Hankelfunktionen

(Kugelwelle)

b) nur auswärtslaufende Wellen $\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}$

Pluszeichen v. oben

c) elektrische Multipolfelder $\vec{r}\cdot\vec{B}=0$

(für andere Randwerte vielleicht sinnvoll generieren)

typischerweise nur gut f. $\vec{M}=0$ (Magnetisierung)

$\rightarrow \quad a^{M}_{\ell m}=0$

aus letzter VL:

$$\vec{E}(\vec{r},\omega)=\sum_{\ell m} a^{E}_{\ell m}\frac{ic(-i)^{\ell+1}}{k}\vec{\nabla}\times\left(\frac{e^{ikr}}{kr}\vec{L}\,Y_{\ell m}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},\omega)=\sum_{\ell m} a^{E}_{\ell m}(-i)^{\ell+1}\frac{e^{ikr}}{ckr}\vec{L}\,Y_{\ell m}$$

$$i\vec{L}=\vec{r}\times\vec{\nabla}\,,\qquad \vec{\nabla}=\left(\partial_r,\frac{1}{r}\partial_\vartheta,\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)$$

$= \vec{e}_r \partial_r \ldots$

a_{lm}^E ist gesucht $\rightarrow$ Feld im ganzen Raum

beim Differenzieren nur $\vec{e}_r \partial_r$ mitnehmen weil

andere Komponenten schneller f. $r \to \infty$ verschwinden

nur $\partial_r e^{ikr}$ mitnehmen

$$\vec{E} = -\sum_{lm} a_{lm}^E \frac{c(-i)^{l+1}}{k} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{e}_r \times \vec{L} Y_{lm}$$

$$= -\vec{e}_r \times \vec{B} c$$

jetzt a_{lm}^E an Randwerte bestimmen

z.B $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$

bekannt auf Fläche die Quelle umschließt

d.h. auf dieser Fläche nach a_{lm}^E umstellen:

$$\vec{e}_r \times \vec{E} = -\sum_{lm} a_{lm}^E \frac{c(-i)^{l+1}}{k} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{L} - \overbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}^{1} \vec{L} \right) Y_{lm}$$

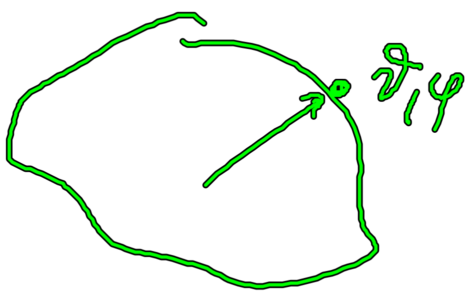
$\vec{e}_r \cdot \vec{L} Y_{lm} = 0$ (gilt f. Fernfeld)

$$\vec{L} \cdot \vec{e}_r \times \vec{E} = \sum_{lm} a^E_{lm}\, c(-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr}\, l(l+1)\, Y_{lm}$$

mit $Y^*_{l'm'}$ multiplizieren, Orthogonalität der Y's nutzen:

$$c(-i)^{l+1}\, a^E_{lm} = \int d\Omega\, \frac{kr\, e^{-ikr}}{i\, l(l+1)} \cdot Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\, (\vec{r} \times \vec{\nabla})(\vec{e}_r \times \vec{E})$$

Randwert der vorgegeb. ist



(ϑ, φ)

Integral über Rand

$\Longrightarrow$ a^E_{lm} kann man bestimmen, wenn

$r = r(\vartheta, \varphi)$ bekannt ist

einfachstes Bsp. $r = R$ = Kugelradius

Konkretes Beispiel auf Kugel: $\vec{E} = E_0 \sin\vartheta\, \vec{e}_\vartheta \quad \forall r = R$

$$\vec{B} = -i \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, \frac{R}{r}\, e^{ik(r-R)}\, \partial_\vartheta Y_{10}\, \vec{e}_\varphi \quad \forall r$$

$(l=1, m=0)$

(Diskussion zu Hause)

Bemerkung: komplizierten Funktionen auf dem Rand

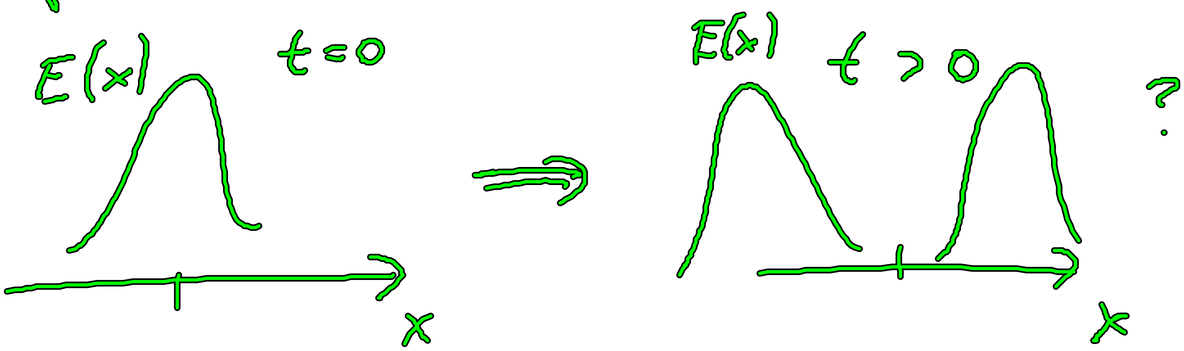
wird auf eine Matrix zur Bestimmung

die $a_{\ell m}$ führen (lineares Gleichungssystem)

wenn man ins Nahfeld

6. Anfangswertaufgabe am Beispiel der ebenen Welle

Feld soll aus einer Anfangsverteilung zur Zeit $t=0$ für alle Zeiten bestimmt werden:



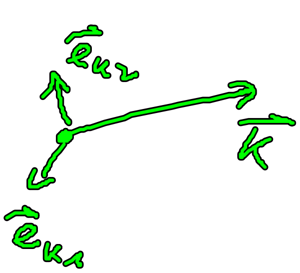
<u>Vorgabe</u>: a) $\varphi_i(\vec r) = E_i(\vec r, t=0)$

b) $\psi_i(\vec r) = \partial_t E_i(\vec r, t=0)$

muß bekannt sein

Ansatz: $$\vec E(\vec r,t) = \sum_{\vec k\,\sigma(k)} \frac{1}{2\sqrt{V}} \underbrace{\vec e_{k\sigma} E_{k\sigma}\, e^{i(\vec k\vec r-\omega_k t)}} + c.c.$$

$$\omega_k = ck$$



$$\vec E(\vec r,0) = \sum_{k\sigma} \frac{1}{2\sqrt{V}} \vec e_{k\sigma} E_{k\sigma}\, e^{i\vec k\vec r} + c.c.$$

$$\partial_t \vec{E}(r,0) = \sum_{k\sigma} \frac{-i\omega_k}{2\sqrt{V}} \vec{e}_{k\sigma} E_{k\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c.$$

nehmen 1 festes σ als Bsp. und löse das Anfangswertproblem für 1 Dimension (nur in x-Richtg.), k kontinuierlich

$$E(x,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, E(k)\, e^{i(kx-\omega_k t)} + c.c.$$

diese Größe aus den Anfangsbedingg. bestimmen (Fouriertrafo d. Felds)

$$E(x,0) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, E(k)\, e^{ikx} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, E^*(k)\, e^{-ikx} \right)$$

$$\underbrace{\partial_t E(x,0)}_{\substack{\text{bekannt} \\ \text{(AB)}}} = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, (-i\omega_k)\, \underbrace{E(k)} e^{ikx} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, (i\omega_k)\, \underbrace{E^*(k)} e^{-ikx} \right)$$

gesucht (bestimmt Feld ∀ Zeiten)

FT von beid Gl. nehmen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, E(x,0)\, \underline{\underline{e^{-ikx}}} = \frac{1}{2}\left(E(k) + E^*(-k) \right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \partial_t E(x,0)\, e^{-ikx} = \frac{1}{2}\left(-i\omega_k E(k) + i\omega(-k) E^*(-k)\right)$$

Bsp: $$\frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{-ik'x}\int dk\, E^*(k)\, e^{-ikx} = E^*(-k')$$

$$\frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{-i(k+k')x} \to \delta(k+k')$$

Die beid. Gleich. oben umstellen und $E(k)$

$$E(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(E(x,0)\, e^{-ikx} - \frac{\partial_t E(x,0)}{i\omega_k}\, e^{-ikx}\right)$$

$\longrightarrow$ $E(k)$ bekannt $\to$ $E(x,t)$ kann berechnet werden

Beispiel Dynamik eines bei $x=0$ lokalisierten elektromagnetischen Pulses

$$\underbrace{E(x,0) = 2\delta(x)\,, \quad \dot{E}(x,0) = 0}_{\text{Schnappschuß}}$$

Wie bekommt man die Zeitdynamik?

1.) $E(k)$ berechnen

$$E(k) = \frac{1}{2\pi}\int dx\, 2\delta(x)\, e^{-ikx} + 0 = \frac{1}{\pi}$$

2.) $E(x,t)$ berechnen

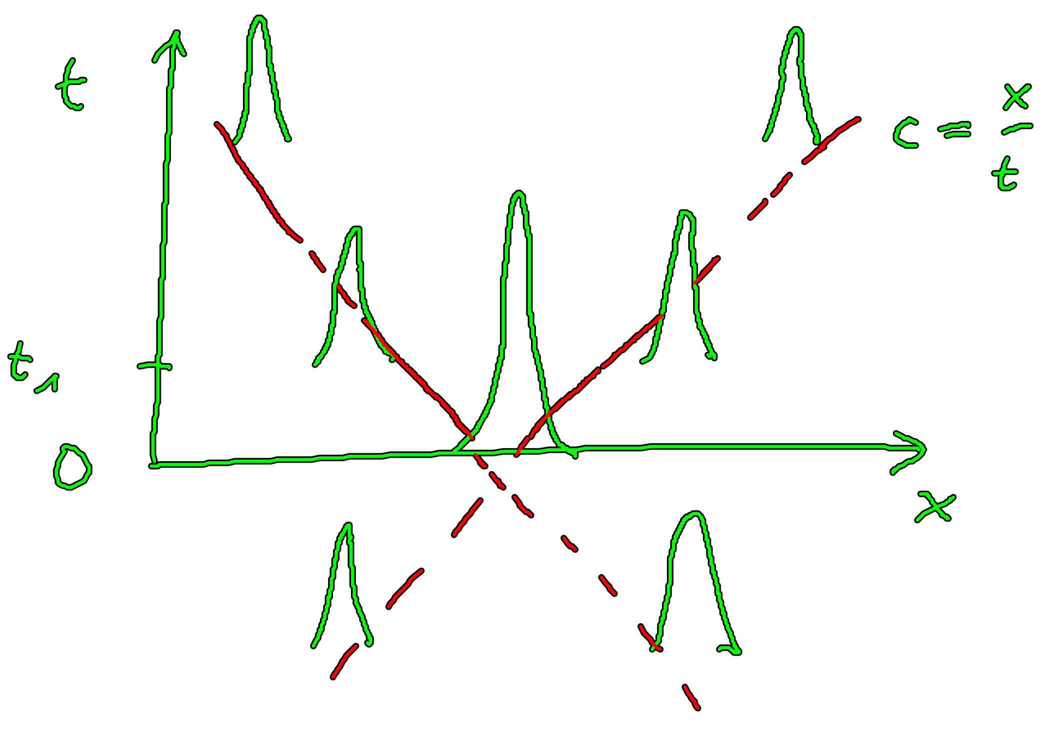
$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx - \overbrace{c(k)t}^{\omega_k})} + \text{c.c.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} dk\, e^{i(kx+ckt)} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} dk\, e^{i(kx-ckt)} + \text{c.c.}$$

$k \to -k$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx+ckt)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx-ckt)}$$

$$E(x,t) = \delta(x+ct) + \delta(x-ct)$$



Das Ergebnis sind 2 Pulse die sich zur Zeit $t=0$ durchdringen und bei negativen Zeiten aufeinander zugelaufen sind. (erklärbar durch $\dot{E}(x,0)=0$).

IV. Lösung der Maxwellgleichungen bei Anwesenheit von Quellen

1. Vektor- und skalares Potential, Eichtransformationen

- Maxwellgl. sind gekoppelte Dgl. 1. Ordnung, verschiedene Felder, Komponenten mischen
- man möchte geschlossene Gleichung f. 1 Feld haben

<u>Preis:</u> 2. Ordnungsgleichung (Wellengleichungen)

dazu führt man Potentiale ein

a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \longrightarrow \underline{\underline{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}}$, weil $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times \equiv 0$

$\vec{A}$ ist das Vektorpotential

b) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{E} + \partial_t \vec{A})}_{\text{„Erhaltungsgröße"}} = 0$

$\rightarrow \vec{E} = -\partial_t A - \vec{\nabla}\phi$, weil $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \equiv 0$

$\vec{\nabla}\phi$ hat die Bedeutung eines Integrationsfelds (analog zur Integrationskonstante)

$\vec{A}$: Vektorpotential, ϕ: skalares Potential

wenn $\vec{A}, \phi$ bekannt $\rightarrow \vec{E}, \vec{B}$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}}$$

$\vec{A}, \phi$ unbekannt, die verbleibende Maxwellgl. werden genutzt um $\vec{A}, \phi$ zu bestimmen

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$

in $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$

eingesetzt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \phi + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} - \nabla\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi\right) = -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$

Potentialgleichungen die Maxwellgl. ersetzen

hilft noch nicht viel weil ϕ, $\vec{A}$ sind verkoppelt

müssten beide gleichzeitig lösen

wollen wir nicht $\longrightarrow$ Eichtransformationen

2. Eichtransformationen

Potentiale können in einem bestimmten Rahmen verändert werden („umgeeicht") ohne Felder zu ändern

das reicht, denn Felder sind beobachtbar:

$$\left.\begin{aligned}\vec{A} &\to \vec{A}' = A + \nabla\chi \\ \phi &\to \phi' = \phi - \partial_t \chi\end{aligned}\right\}$$ Eichtransformation

um zu zeigen, daß χ existiert und beliebig gewählt werden kann

a) $\vec{E} = \vec{E}'$, $\vec{B} = \vec{B}'$, folgt durch einsetzen

b) Potentialgl. ändern sich nicht, d.h. durch einsetzen von $\vec{A}'$, ϕ' erhält man die gleichen Gl. f. $\vec{A}, \phi$ von derselben Form

(einsetzen)

c) χ muß wenn fest gewählt, konstruiert werden können

2.1. Lorenzeichung

wähle χ, so daß $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0$

Potentialgleichungen in Lorenzeichung

$$\nabla^2\phi' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi' = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla^2\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 A' = -\mu_0\vec{j}$$

- $\phi', \vec{A}'$ Gleichungen sind entkoppelt, wir können diese getrennt als Funktion von ρ oder $\vec{j}$ lösen
- symmetrische Formulierung in beiden Potentialen (beides sind Wellengleichungen), ist für gleichwertige Näherungen wichtig
- günstig f. relativistische Schreibweise (Vierervektoren)

wie wird χ konstruiert?

χ kann aus Eichtransformation bestimmt werden:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\chi$$

$$\partial_t \phi' = \partial_t \phi - \partial_t^2 \chi$$

$$\underbrace{0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi'}_{\text{Forderung}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Delta\chi + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = 0$$

$$\rightarrow \Box\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\phi$$

χ kann aus den alten Potentialen immer berechnet werden

→ Lorenzeichung ist möglich.

2.2. Coulombeichung

wähle mir Ψ so, daß $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\text{Potentialgleichungen in Coulombeichung}} \\ &\nabla^2\phi' = -\rho/\varepsilon_0 \\ &\nabla^2 A' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}_T \end{aligned}}$$

$$-\mu_0\vec{j}_T = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\phi'$$

$$\vec{j}_T = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Vorteile der Coulombeichung

- wenn keine Quelle hat, so reicht es A zu bestimmen, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \rightarrow \partial_t\vec{E} = c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}$

alle Felder sind durch $\vec{A}$ bestimmt

– oftmals werden Strahlungseffekte durch $\vec{A}$ bestimmt und sind klein (weggelassen) und die Gleichung für ϕ ist in Coulombeichung einfach zu lösen

- sinnvolle Wahl von χ:

$$\underbrace{0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'}_{\text{Forderung}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\chi$$

$$\rightarrow \quad \Delta\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

χ also bestimmt $\rightarrow$ Coulombeichung.