3. Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen

Die Potentialgleichungen sind in Form der Poissongleichung oder der Wellengleichung gegeben: $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$

Coulombeichung $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T$

wobei $\vec{j}_T = f(\vec{j}(\vec{r},t)) \hat{=}$ transversaler Strom

(Herleitung und Transversalität im Tutorium)

Lorenzeichung $\Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

Also sind gesucht Lösungen der inhomogenen Wellengleichung:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \psi(\vec{r},t) = -4\pi f(\vec{r},t) \quad (*)$$

ψ ist eine Komponente von A_i oder ϕ

Poissongleichungslösung für $c \to \infty$ enthalten

- Zur Lösung von $*$ Definition einer Greenschen Funktion

$G(\vec{r},\vec{r}\,', t, t')$

$$\vec{\nabla}_r^2 G - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 G = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$$

Die Quelle der Greenschen Funktion ist eine Punktladung am Ort $\vec{r}\,'$ die nur zur Zeit t' „hingelegt" wird.

„blitzartige am Ort $\vec{r}\,'$ lokalisierte Ladung" $\Rightarrow$ Feld G

Diese G hilft, die Gleichungen für Ψ zu lösen:

3 wichtige Bemerkungen (a–c) zu G:

a) wenn G bekannt, so $\Psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt'\, G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')\,\rho(\vec{r}\,',t')$

<u>Beweis:</u> $\underset{(\vec{r},t)}{\square}\, \Psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt'\, \underbrace{\square_{r,t}\, G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')}\,\rho(\vec{r}\,',t')$

$$\square\, \Psi(\vec{r},t) = -4\pi\,\rho(\vec{r},t) \quad \checkmark$$

b) $G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')$ kann nur von der Differenz $G(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$ abhängen (Quellen sind von $\vec{r}-\vec{r}\,', t-t'$ abhängig oder Koordinatentrafo)

$$\rightarrow \square\, G(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$$

c) die Lösungen für G sind: $t'=0$ oBdA, am Ende: $t \to t-t'$
$\vec{r}\,'=0$ oBdA, am Ende: $\vec{r} \to \vec{r}-\vec{r}\,'$

$$G^{\pm}(|\vec{r}|,t) = \frac{\delta\left(t \mp \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{|\vec{r}|}$$

Beweis: $\vec{r}\,'=0$, $t'=0$ oBdA

$$\left(\vec{\nabla}_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r},t) = -4\pi\,\delta(\vec{r})\,\delta(t) \quad \text{lösen f. } G$$

Fouriertrafo von $G(\vec{r},t)$ und δ einführen:

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q \int d\omega\, \underbrace{G(\vec{q},\omega)}_{\text{Fouriertransformierte von } G(\vec{r},t)}\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Rücktrafo Fouriertrafo (4x)

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}, \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{-i\omega t}$$

einsetzen in Wellengleichung f. $G(\vec{r},t)$

$$\Big(\underbrace{(i\vec{q}\cdot i\vec{q})}_{\vec{\nabla}_r^2} + \underbrace{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}_{\frac{1}{c^2}\partial_t^2}\Big)\, G(q,\omega) = -4\pi \; 1$$

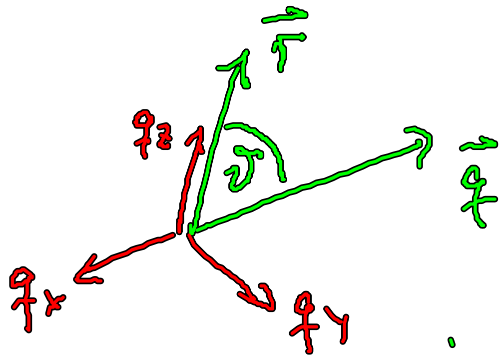
$e^{i\ldots}$, Integrale weglassen, da vollständiges System

$$G(\vec r,t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\underbrace{\int d^3q \int d\omega\, e^{i(\vec q\cdot\vec r-\omega t)}\,\frac{1}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}}_{\text{ist zu lösen} \,\to\, G \text{ bekannt}}$$

$$|\vec q| = q$$

Volumenintegral zur q-Integration

$\vec r$ zeigt in q_z Richtung



Kugelkoordinaten:

q, ϑ, φ

$$G(\vec r,t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dq\, q^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{\text{Kugelkoordinaten } \int d^3q}\,\frac{e^{iqr\cos\vartheta}}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$

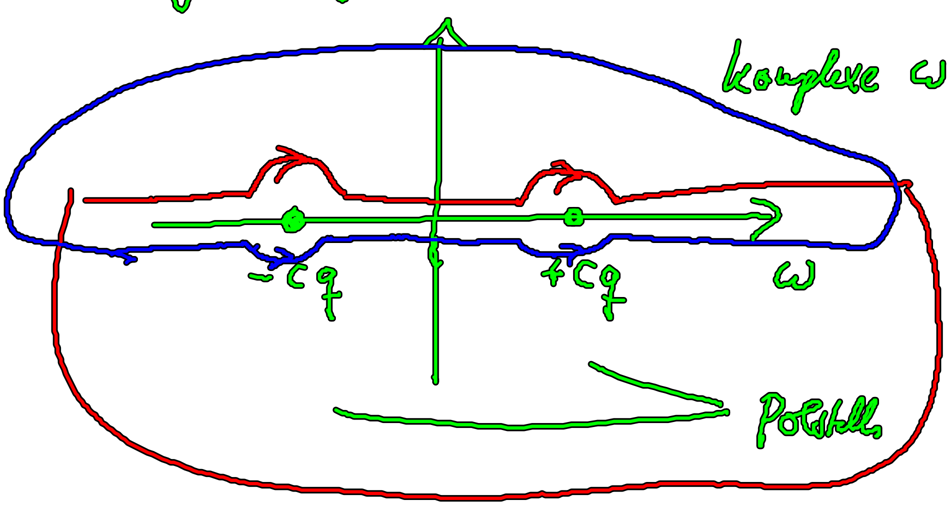
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \to 2\pi\,; \quad \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, e^{iqr\cos\vartheta}}_{\cos\vartheta = x} = \int_{-1}^{1} dx\, e^{iqrx} = \frac{2}{qr}\sin qr$$

$$G(\vec r,t) = -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty dq\, q\,\frac{\sin qr}{r}\,\underset{\varphi,\vartheta}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-c^2q^2}$$

$$= -\frac{c^2}{\pi^2 r}\int_0^\infty dq\, q\,\sin qr\,\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-c^2q^2}}_{\text{Polstellen (Funktionentheorie) bei } \omega=\pm cq}$$

Lösung erfolgt mit Residuensatz

komplexe ω-Ebene



oben Integrationsweg, und unten geschlossen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-c^2q^2} = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{cq}\sin(cqt) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

unten

<u>$t>0$</u> : Lsg heißt $G^+(\vec r,t)$

$\underline{t<0}$: bzgl. liefert $G^-(\vec r,t)$ oben geschlossen

$$G^+(\vec r,t) = \frac{2c}{\pi r}\underbrace{\int_0^\infty dq\,\sin(qr)\sin(cqt)}_{\displaystyle\frac{1}{2i}\underbrace{\int_0^\infty dq\left(e^{iqr}-e^{-iqr}\right)\sin cqt}_{\displaystyle\underbrace{\int_0^\infty dq\, e^{iqr}\sin(cqt) - \int_{-\infty}^0 dq\, e^{iqr}\sin(cqt)}_{\displaystyle\frac{1}{2i}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dq\left(e^{iq(r+ct)}-e^{iq(r-ct)}\right)}_{\displaystyle -\frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\delta(r+ct)}_{\to 0 \text{ weil } t>0}-\delta(r-ct)\right)}\frac{1}{2i}}\quad q\to -q}} \quad (t>0)$$

$\to$ insgesamt folgt für

$$G^+(\vec r,t) = \frac{c}{r}\,\delta(r-ct) = \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

$$G^-(\vec r,t) = \frac{c}{r}\,\delta(r+ct) = \frac{\delta\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}$$

G^+, G^- sind die retardierte (+) bzw die avancierte (−) Greensche Funktion.

Argument der G^+ Fkt zeigt, daß ein am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t beobachteter Effekt durch die „Blitzladung" $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$ am Ort $\vec{r}\,'$ zur Zeit $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ hervorgerufen wird.
$(t > t')$

t ist also verspätet („retardiert") im Vgl. zu t'

$$G^{\pm}(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right]\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

(umgekehrt für G^- trifft die Wirkg. vor der Ursache ein → wegwerfen)

Ausbreitungszeit der Ursache von $\vec{r}\,'$ nach $\vec{r}$ gegeben durch $\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$, Resultat der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit.

Damit ergeben sich sofort die Lösungen für die Potentiale

$$\psi^+(\vec{r},t) = \int d^3r' \, \frac{f\left(\vec{r}',\, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

durch Einsetzen von G.

$\Rightarrow$ für die Lorenzeichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec{r}',\, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}',\, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Coulombeichg.

$$\phi : c \to \infty \,, \quad \vec{A} : \vec{j} \to \vec{j}_T$$

Interpretation analog z. Greenschen Funktion

Hinweis: instantanes Potential ϕ in der Coulombeichung ist kein Problem, wird „gutgemacht" durch $\vec{j} \to \underline{\vec{j}_T}$ bei $\vec{A}$

$\Rightarrow$ Felder okay

4. Strahlung vorgegebener klassischer Quellen

zeitl. und räumliche Struktur von $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$ sei vorgegeben und Felder sind gesucht

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_\omega \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_\omega \vec{j}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \quad \text{(oder Fourier-Integral)}$$

- einzelne Frequenzen ω für die wir rechnen können auf beliebige Zeitabhängigkeiten durch $\sum_\omega$ am Ende der Rechnung verallgemeinert werden

- betrachten jetzt nur 1 festes ω,
- geht wegen Linearität!

Bemerkg: im freien Raum wo $\rho, \vec{j} = 0$ sind reicht es aus $\vec{A}$ zubestimmen:

$$\underbrace{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \;\longrightarrow\; \partial_t \vec{E} = c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{\text{außerhalb von Quellen}}$$

$\longrightarrow$ ab jetzt nur $\vec{A}(\vec{r},t)$ berechnen um $\vec{E},\vec{B}$ zu bestimmen

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int d^3r'\,\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{Lorentzeichg.}}$$

Fourierhansformation:

$$\sum_\omega \vec{A}_\omega(\vec{r})\,e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_\omega \int d^3r'\,\frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}\,')\,e^{-i\omega\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec{j}_\omega(\vec{r}\,')\,\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

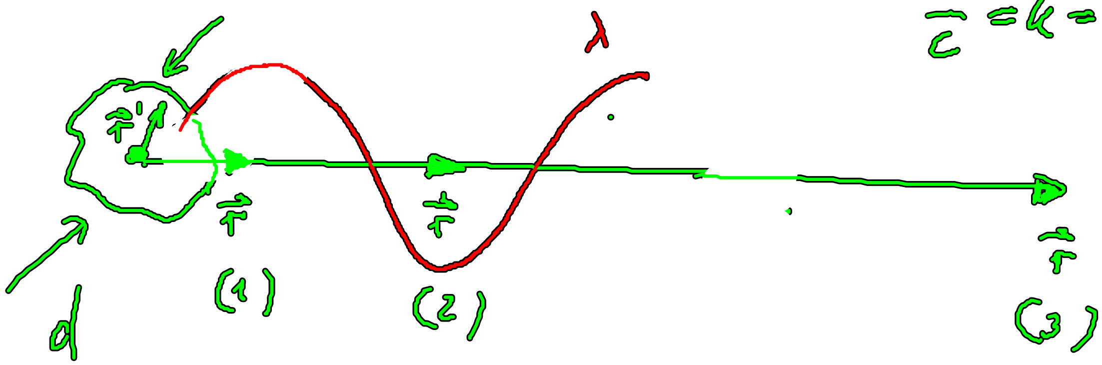
oftmals Abkürzung $k = \frac{\omega}{c}$

Damit $\vec{A}$ für 1 feste Frequenz (aber beliebig) berechenbar.

4.1. Qualitative Diskussion kleiner Quellen

Ausdehnung der Quelle sei d

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Quelle mit $\rho_\omega(\vec{r}'), \vec{j}_\omega(\vec{r}')$: Kleine Quelle: $\lambda \gg d$

(1) Nahzone $|\vec{r}| \ll \lambda$

$$k\,|\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1 \rightarrow e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$$

$$\rightarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Verhalten ist hier analog zur Magnetostatik

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

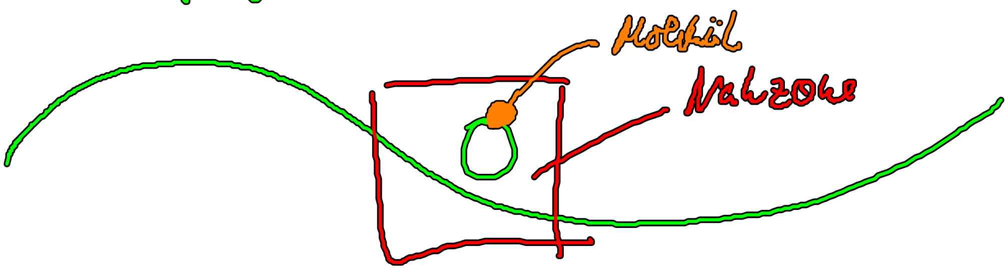
Man ist so nah an Quelle, daß

Laufzeiteffekte $\to 0$ gehen

- Anwendung in Plasmonik:

Nanometallteilchen (5 nm) mit optischen Lasern

angeregt $\lambda \approx 500$ nm



(2) Mittelzone („Induktionszone") $r \simeq \lambda$

schwierig, muß $\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ muß u.U. voll mitgerechnet werden, Diskussion später

(3) Fernzone („Strahlungszone") $r \gg \lambda$

weit weg von der Quelle

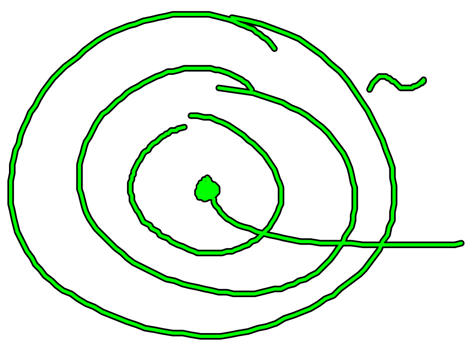
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \frac{\vec{J}_\omega(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} e^{-i\omega t}$$

$$|\vec{r}\,'| < d < \lambda \ll |\vec{r}| \to |\vec{r}-\vec{r}\,'| \approx |\vec{r}|$$

r

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}')}_{\text{Zahl}(\omega)}$$

Im ebenen Fernfeld wird $\vec{A}$ als Kugelwelle beschrieben ([illegible] Hankelfunktion die wir bereits verwendet haben)



im Lauf der Zeit Verteilg. auf größeren Kugel $\rightarrow$ $\bar{E}$-Erhaltg d. Abklingen mit $\frac{1}{r}$