3. Folgerung: $\vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k}'\cdot\vec{r}$ analoge Rechnung, ohne Beweis

$\varphi' = 0$, $k \sin(i) = k' \sin(r) \longrightarrow \dfrac{\sin(i)}{\sin(r)} = \dfrac{c_n}{c_{n'}} = \dfrac{n'}{n}$

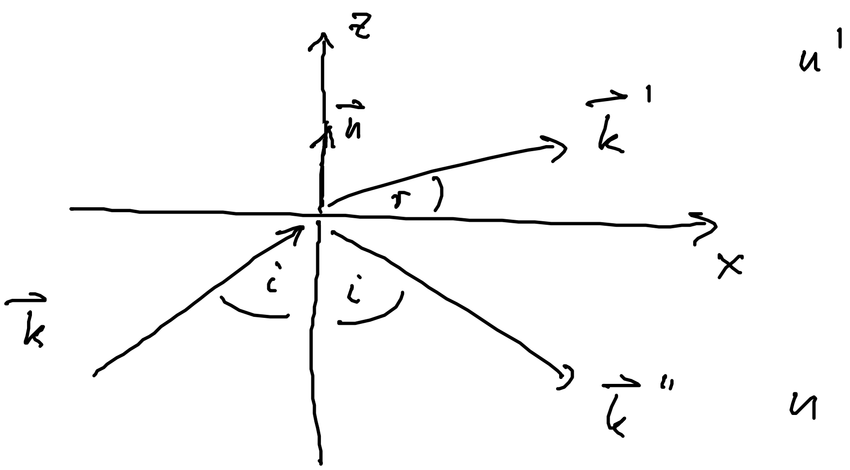
(i) Sinus von Einfalls und Brechungswinkel verhalten sich umgekehrt wie die Brechzahlen der Medien

(ii) φ' als Polarwinkel des $\vec{k}'$ Vektors gewählt $\longrightarrow$ $\vec{k}, \vec{k}'$ liegen in einer Ebene

$\Rightarrow$ $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ liegen in einer Ebene

= erhebliche Vereinfachung

4.2. Ableitung der Fresnelschen Formeln



weil $\vec{k}', \vec{k}''$, und $\vec{k}$ in einer Ebene liegen

eingestrahlt	gebrochen	reflektiert
$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$	$\underline{E}' = \underline{E}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)}$	$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega'' t)}$

(Phasen müssen gleich sein an GF ($z=0$)
weil Grenzbedingungen $\forall$ Punkt in der Ebene zu allen Zeiten gelten müssen, kann man das Gleichungssystem f. die stetigen Felder nur erfüllen, wenn Ort, Zeit herausfallen (Folgerung (1-3)), ansonsten überbestimmt.)

aus Maxwellgl. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \qquad (\omega = c_{n^{(\prime)}} k \text{ im Medium } n^{(\prime)})$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{c_{n^{(\prime)}} k} \times \vec{E}$$

$$\begin{array}{l|l|l} \text{mit } c_n^2 k^2 = \omega^2 & c_{n'}^2 k'^2 = \omega'^2 & c_n^2 k''^2 = \omega''^2 \\ \vec{B} = \frac{1}{c_n} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} & \vec{B}' = \frac{1}{c_{n'}} \frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{E}' & \vec{B}'' = \frac{1}{c_n} \frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{E}'' \end{array}$$

- uns interessiert Verhältnis von $\frac{E_0'}{E_0}$, $\frac{E_0''}{E_0}$

  wieviel wird gebrochen bzw. reflektiert?

- man kann jedes E-Feld in $\vec{k}$-Richtg. in 2 ⊥ Vektoren zerlegen: Wahl der beiden Richtungen?

(i) Definition der Einfallsebene, wird zwischen $\vec{k}$ und $\vec{n}$ aufgespannt

(ii) Polarisation des E-Felds ⊥ EFE (s polarisiert)

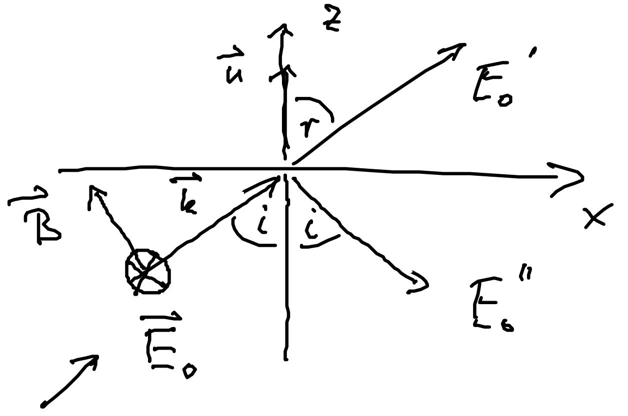
(iii) Polarisation des E-Felds // zur EFE

(p polarisiert)

→ Allgemein Fall durch Superposition von (ii)/(iii)

<u>s polarisiert</u>

EFE = x,z Ebene



senkrecht polarisiert zur Einfallsebene

$\vec B$ kann dann bestimmt werden, weil ⊥ $\vec k$, $\vec E$

<u>Tangentialkomponente Stetigkeit d. $\vec E$-Felds:</u>

$$(\vec E_0 + \vec E_0'') \times \vec n = \vec E_0' \times \vec n$$

$\vec E$, $\vec n$ stehen alle ⊥ aufeinander, nach Kreuzprodukt

$$\boxed{E_0 + E_0'' = E_0'} \quad *$$

<u>Tangentialkomponente Stetigkeit von $\vec H$-Feld:</u> $B = \mu \mu_0 H$

$$(\vec H_0 + \vec H_0'') \times \vec n = \vec H_0' \times \vec n \qquad (H \sim B \sim E)$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)\times\vec{n} = \frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\times\vec{n}$$

(siehe oben)

mit $$n\times(\vec{k}\times\vec{E}_0) = \underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{E}_0)}_{=0\text{ , s-polarisiert }\perp\text{ EFE}}\vec{k} - (\vec{n}\cdot\vec{k})\vec{E}_0$$

$$\frac{1}{\mu}\underline{\underline{(\vec{n}\cdot\vec{k})}}\vec{E}_0 + \frac{1}{\mu}(\vec{n}\cdot\vec{k}'')\vec{E}_0'' = \frac{1}{\mu'}(\vec{n}\cdot\vec{k}')\vec{E}_0'$$

**

$$\boxed{\frac{k}{\mu}\cos(i)E_0 + \frac{k''}{\mu}E_0''\cos(\pi-i) = \frac{k'}{\mu'}E_0'\cos(r)}$$

r noch über Brechungsgesetz berechnen:

***

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n}{n'} \rightarrow \boxed{\cos(r) = \sqrt{1-\left(\frac{n}{n'}\sin(i)\right)^2}}$$

*, **, *** → sind 3 Gleichungen

für 3 Unbekannte: E_0', E_0'', r

bekannt : i, E_0

Amplitudenverhältnis bei Brechung :

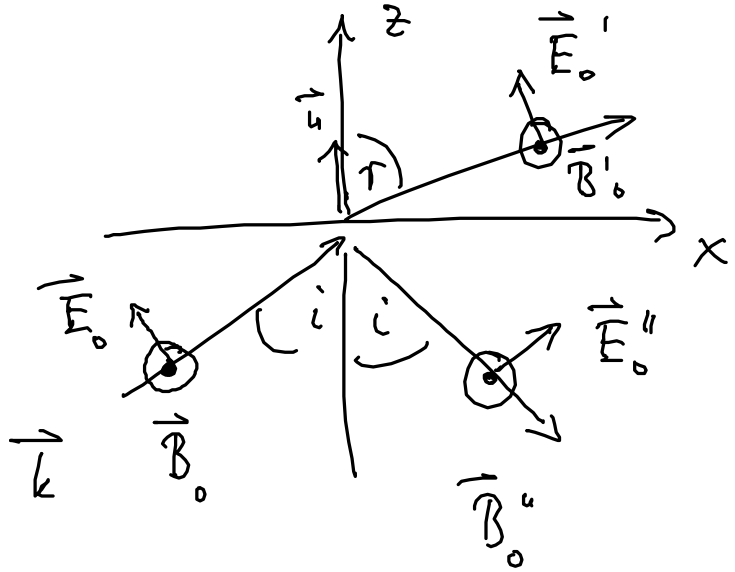
$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos(i)}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos(i) - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

Damit ist man in der Lage, die reflektierte und die gebrochene Amplitude $E_0^{'('')}$ als Fkt. des Einfallswinkels und der Materialkonstanten zu berechnen.

p- Polarisation

Berechnung erfolgt analog



$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn'\cos(i)}{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\cos(i) - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

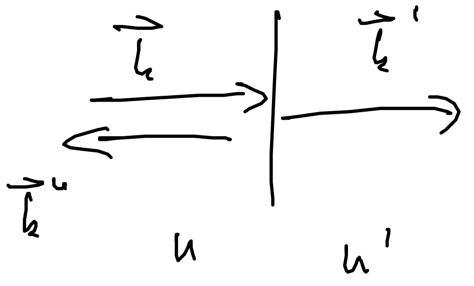
$\Rightarrow$ man kann s, p getrennt berechnen und am Ende jedes beliebige Feld E', E'' durch Überlagerung von allen $\vec{k}$'s und allen s, p Anteilen berechnen.

Bemerkungen

a) Diese Formeln $\frac{E_0'^{(\prime)}}{E_0} = \dots$ heißen Fresnelsche Formeln.

b) Billigfall : $\vec{k}$ $\perp$ auf die Oberfläche

(?)



$i = 0$

$\Longrightarrow$

$\mu = \mu'$

$n \neq n'$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n'+n} \quad , \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n-n'}{n'+n}$$

wenn $n' > n$, so „erleidet" E_0'' (reflektierte Signal) einen Phasensprung, weil Vorzeichen wechselt ($-1 = e^{i\pi}$)

c) umgekehrt können die Formeln angewendet werden um n' zu bestimmen aus Messung von eingestrahlten u. reflektierten Feld

d) <u>Brewsterwinkel</u>

p-polarisiertes Licht: $\exists$ Einfallswinkel für den es keine reflektierte Welle gibt; d.h. beliebige Polarisation kommt „immer" s-polarisiert zurück

$\longrightarrow$ nutzen um fest polarisierte Strahlung herzustellen p-Polarisation Fresnel Formel : $\frac{E_0''}{E_0} = 0$ setzen

und die Gleichung nach $i = i_B$ (B- Brewster)

umstellen

$$n'^2 \cos(i_B) = n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i_B)}$$

muß nach i_B umgestellt werden

(quadrieren, $\alpha = \frac{n'}{n}$ einführen, α Gleichg. lösen)

$$\alpha^4 (1 - \sin^2(i_B)) = \alpha^2 - \sin^2(i_B)$$

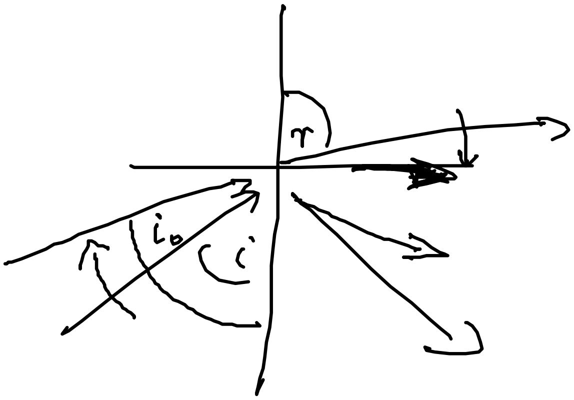
+ verwenden : $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \mathrm{artg}\,(x)$

$$\rightarrow i_B = \mathrm{arctg}\,(\alpha) = \mathrm{artg}\left(\frac{n'}{n}\right)$$

optische Frequenzen Glas / Luft - übergang → $i_B = 56°$

e) Totalreflexion (optisch dicht → dünn)

Brechung $n > n'$, $r > i$ (Brechungsgesetz)



$r = \frac{\pi}{2}$ ≙ Totalreflexion, wie bestimmt man i_0 als Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n}{n'} \longrightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin i_0} = \frac{n}{n'}$$

$$\sin(i_0) = \frac{n'}{n}$$ (Luft/Glas → $i_0 = 42°$)

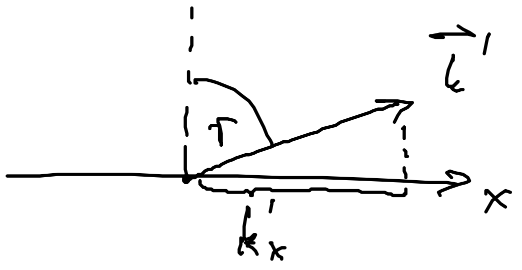
Achtg.! Alles von $n(\underline{\underline{\omega}})$, $n(\underline{\underline{\omega}})$,

also frequenzabhängig!

bei Totalreflexion läuft an der Grenze ein

„evaneszente" Welle entlang

gebrochener Strahl: $e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} = e^{i(k_x'\cdot x + k_z' z)}$



$$k_x' x = k' \cos\left(\frac{\pi}{2} - r\right) x = k' \sin(r) x$$

$$k_z' \cdot z = k' \cos(r)\, z$$

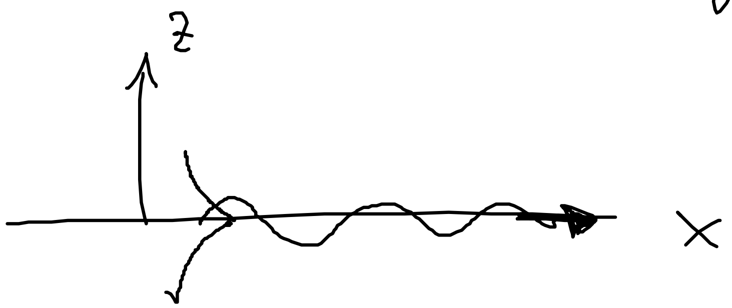
$$e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = e^{ik'x \underbrace{\frac{\sin(i)}{\sin(i_0)}}_{\text{Siehe oben}}}\; e^{ik'z \underbrace{\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{\sin^2(i_0)}}}_{\left(\frac{\sin(i)}{\sin(i_0)}\right)^2 \geq 1}}$$

oberhalb oder gleich

∡ der Totalreflexion einstrahlen

$$e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = e^{ik'x\frac{\sin(i)}{\sin(i_0)}}\; e^{-k'z \underbrace{\sqrt{\frac{\sin^2(i)}{\sin^2(i_0)} - 1}}_{\text{reell}}}$$

Die gebrochene Welle läuft demnach entlang der x-Achse, ist aber in z-Richtung exponentiell gedämpft:



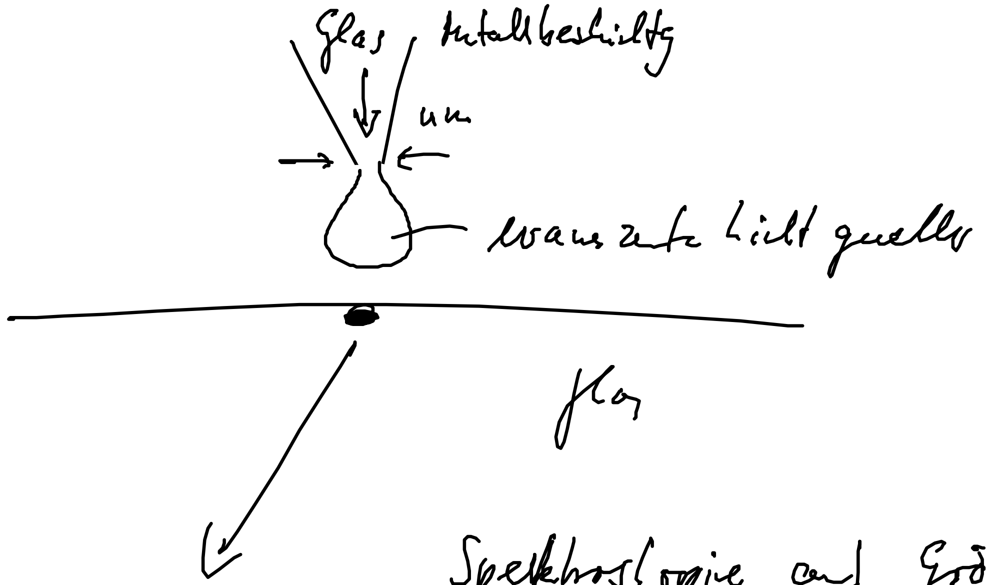
Die Welle ist in einer dünnen Schicht um die Grenzfläche lokalisiert und breitet sich entlang der Grenzfläche aus.

Exponentielles Abklingverhalten bei Wellen wird als evaneszent bezeichnet.

Die gesamte Intensität wird reflektiert:

$$\frac{E_0''}{E_0} = \left| i = i_0 \right| = 1$$

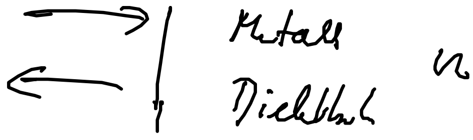
Bemerkung: Abklingen findet typischerweise auf Längenskala $l \sim \lambda$ statt, Optik in diesem Bereich heißt „Nahfeldoptik"



Spektroskopie auf Größenordn. unterhalb der Wellenlänge

5. Metallische und dielektrische frequenzabhängige Reflexion

$\perp$ Einfall $\quad n' = 1$



$$R = \left| \begin{matrix} \text{Reflexions-} \\ \text{koeffizient} \end{matrix} \right| = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \left| \frac{E_0''}{E} \right|^2$$

$R = R(\omega)$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$ messen

Modell f. $n(\omega)$ aus letzter VL:

$$n(\omega) = \left(1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\right)^{1/2}$$

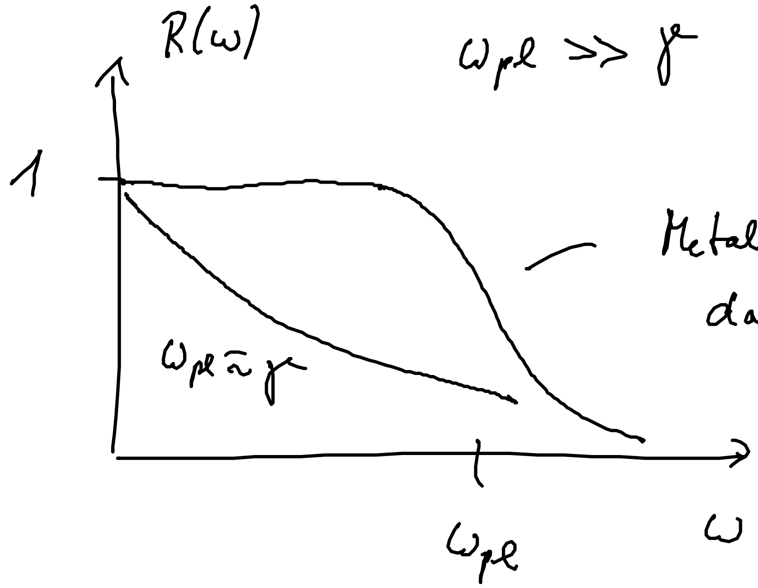
$\nearrow$ Rückstellkraft $\qquad$ $\uparrow$ Dämpfg.

$\swarrow$ $\searrow$

$= 0$, Metall $\qquad$ $\neq 0$, Dielektrikum

Metalle:

Plot in HA

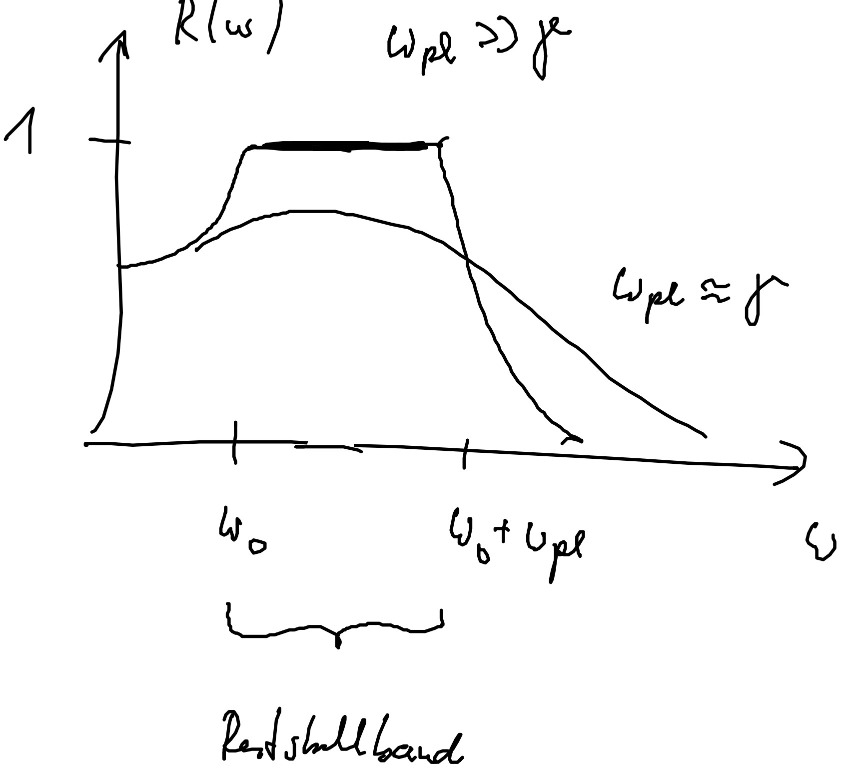


Metall transparent für $\omega > \omega_{pl}$ darunter sorge Plasmon dafür daß sich Licht nicht ausbreiten kann, sondern reflektiert wird.

Spektral Filter! (Kante)

Dielektrika

$\boxed{HA}$



Es existiert ein Bereich
in dem kein Ausbreitg.
Mgl. ist, weil alles
reflektiert wird
(„Reststrahlbande")