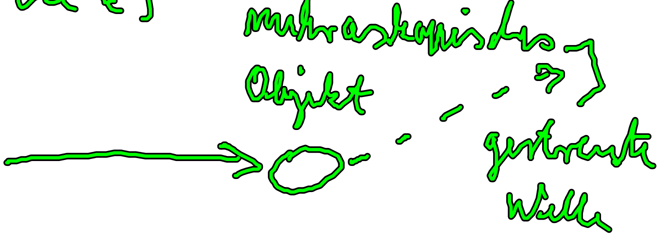
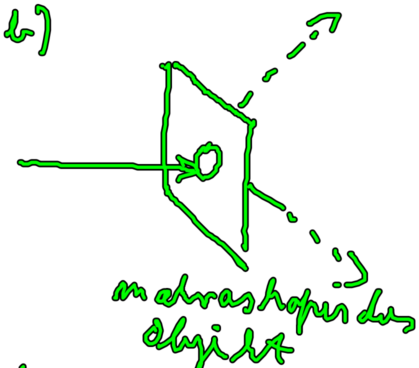
VII Streuung und Beugung elektromagnetischer Wellen: Wellenoptik

a) WW einer Welle mit kleinen Objekten bzw. Ansammlungen von kleinen Objekten. Die gestreute Welle enthält Informationen über das streuende Objekt. } Streuung

b) WW einer Welle mit makroskopischem Objekt. Untersucht werden Abweichungen von geometrischer Optik. } Beugung zu a)



zu b)



- Beide Themen können aber nicht streng getrennt werden. Insbesondere wenn $\lambda \sim$ Abmessung a der Objekte
- Behandlung hängt typischer Weise von den beteiligten Längenskalen ab, d.h. λ/a ist das charakteristische Verhältnis, nach dem die Theorie entwickelt wird.
- allg. ist die exakte Lösung schwierig.
- Computersimulation z.B. FDTD (finite difference time domain), Zeit- und Ortsraumdynamik der vollen Maxwellgleichungen numerisch rechnen. So daß man von einer räumlichen Anfangsverteilung zu einem Zeitpunkt t_0 startet und diese sich dann zeitlich und räumlich entwickelt. (geht heute mit PC rechnen)

1.) Rayleigh-Streuung

ist die Streuung, die aus einer ebenen Welle durch ein Ensemble von Dipolstreuern erzeugt wird: $\to$ Himmelsblau erklären.

Start: makroskopischen M.-Gleichungen

nur mit Dipoldichte $\rho_m = 0 = j_m$

$$\nabla\cdot\underline{B}=0\,,\quad \underset{(1)}{\nabla\times\underline{E} = -\partial_t \underline{B}}\,,\quad \underset{(2)}{\nabla\cdot\underline{D}=0}\,,\quad \underset{(3)}{\nabla\times\underline{H} = \partial_t\underline{D}}$$

Ableitung einer Wellengleichung für $\underline{D}$:

a) mit (1) $\varepsilon_0 \nabla\times\nabla\times\underline{E} = -\varepsilon_0\partial_t\nabla\times\underline{B}$, $\nabla\times\nabla\times\underline{D} = \nabla\underbrace{\nabla\cdot\underline{D}}_{=0} - \Delta\underline{D}$

voneinander abziehen:

$$\nabla\times\nabla\times(\underline{D}-\varepsilon_0\underline{E}) = -\Delta\underline{D} + \varepsilon_0\partial_t\nabla\times\underline{B} \quad (*)$$

b) mit (3):

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\underline{D} = \frac{1}{c^2}\nabla\times\partial_t\underline{H} \quad (\boxplus)$$

$(*)$ und $(\boxplus)$ zusammen:

$$\Delta\underline{D} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\underline{D} = -\nabla\times\nabla\times(\underline{D}-\varepsilon_0\underline{E}) + \varepsilon_0\partial_t(\nabla\times\underline{B}) - \varepsilon_0\mu_0\partial_t(\nabla\times\underline{H})$$

$$\Delta\underline{D} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\underline{D} = \underbrace{-\nabla\times\nabla\times(\underline{D}-\varepsilon_0\underline{E}) + \varepsilon_0\partial_t\nabla\times(\underline{B}-\mu_0\underline{H})}_{\sim\,\underline{Q}(\underline{r},t)}$$

- linke Seite: freie Ausbreitung des $\underline{D}$-Feldes
- rechte Seite: Korrekturen des Materials zur freien Ausbreitung (im Vakuum)

Formale Lösung der Wellengleichung mit Quelle $\underline{Q}(\underline{r},t)$

$$\underline{D}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\underline{Q}\left(\underline{r}';t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Periodische Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ abspalten (FT):

$$\sum_\omega \underline{D}_\omega(\underline{r})\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{4\pi}\sum_\omega \int d^3r' \,\frac{\underline{Q}_\omega(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, e^{-i\omega t}\, e^{i\frac{\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underline{D}_\omega = \underline{D}_\omega^0 + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \,\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\underline{Q}_\omega(\underline{r}')$$

vollständige Lsg. aus inhomogener (Term mit $\underline{Q}_\omega(\underline{r})$) und homogener Lsg.: $\underline{D}_\omega^0$

<u>Quelle:</u> $\underline{Q}_\omega(\underline{r}') = \nabla'\times\nabla'\times(\underline{D}_\omega - \varepsilon_0 \underline{E}_\omega) + i\varepsilon_0\omega\,\nabla'\times(\underline{B}_\omega - \mu_0 \underline{H}_\omega)$

jetzt: $|\underline{r}'| \ll |\underline{r}|$: Beobachtung des gestreuten Feldes im Fernfeld

dann: Entwicklung $|\underline{r}-\underline{r}'| \approx r - \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\cdot\underline{r}'$

$$\underline{D}_\omega = \underline{D}_\omega^0 + \frac{e^{ikr}}{r}\,\underline{A}_{st}(\omega)$$

$$\underline{A}_{st}(\omega) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{ik\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}\,\underline{Q}_\omega(\underline{r}') \quad , \quad \underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

Kugelwelle mit Streuamplitude $\underline{A}_{st}(\omega)$

Vereinfachung des Integrals indem ∇' aus $\underline{Q}_\omega(\underline{r}')$ auf $e^{ik\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}$ abgewälzt wird (partielle Integration).

$$-\nabla' e^{-ik\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}\times \underline{g}(\underline{r}') = ik\,\underline{e}_r\times\underline{g}(\underline{r}')\,e^{-ik\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}$$

$$\underline{Q}_\omega(\underline{r}') = k^2\left(-\underline{e}_r\times(\underline{e}_r\times(\underline{D}_\omega-\varepsilon_0\underline{E}_\omega)) - \frac{\varepsilon_0\omega}{k}\,\underline{e}_r\times(\underline{B}_\omega-\mu_0\underline{H}_\omega)\right)$$

Das verbleibende Integral über $\underline{Q}_\omega(\underline{r}')$ muss berechnet werden. Ist aber unbekannt, da die Felder unbekannt sind. (Integralgleichung). Kann durch folgende Iteration näherungsweise gelöst werden: Einfluss der Streudichte sei $\varepsilon_0\,\delta\varepsilon(\underline{r})$ als Korrektur zu ε_0:

$$\underline{D}_\omega(\underline{r}) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_0\,\delta\varepsilon(\underline{r}))\,\underline{E}_\omega(\underline{r}) \quad , \quad \underline{B}_\omega(\underline{r}) = (\mu_0 + \mu_0\,\delta\mu(\underline{r}))\,\underline{H}_\omega(\underline{r})$$

Erste Bornsche Näherung bedeutet:

$$(\underline{D}_\omega(\underline{r}) - \varepsilon_0 \underline{E}_\omega(\underline{r})) = \varepsilon_0\, \delta\varepsilon(\underline{r})\, \underline{E}_\omega(\underline{r}) \approx \delta\varepsilon(\underline{r})\, \underline{D}^0_\omega(\underline{r})$$

$$(\underline{B}_\omega(\underline{r}) - \mu_0 \underline{H}_\omega(\underline{r})) = \mu_0\, \delta\mu(\underline{r})\, \underline{H}_\omega(\underline{r}) \approx \delta\mu(\underline{r})\, \underline{B}^0_\omega(\underline{r})$$

die freie Lösung wird in den Störterm eingesetzt und damit die Wellengleichung gelöst, dies führt zu einer verbesserten Lsg.
$\delta\varepsilon(\underline{r})$, $\delta\mu(\underline{r})$ können frequenzabhängig sein.

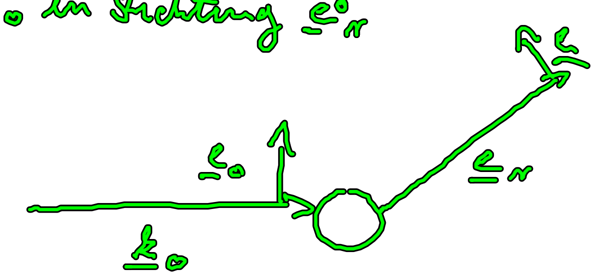
Born Approximation: Einsetzen der extern eingestrahlten Welle in den Integranden, um eine Lsg. in erster Ordnung der eingestrahlten Welle zu bekommen.
Die verbesserte Lsg. kann dann wieder in Integral eingesetzt werden.
$\longrightarrow$ Bornsche Reihe

1. Bornsche Näherung = nach einmaliger Prozedur abbrechen

$\underline{D}^0_\omega$ als einfallende Welle kann als bekannt angenommen werden.
(Einlaufrichtung $\underline{k}_0$, $|\underline{k}_0| = k_0 = \frac{\omega}{c}$)

$$\underline{D}^0_\omega = \underline{e}_0 D_0 e^{i\underline{k}_0\cdot\underline{r}} \quad , \quad \underline{B}^0_\omega = \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\underline{k}_0 \times \underline{D}^0_\omega(\underline{r})$$

Vor der Berechnung: Definition der Meßgröße:
differentielle Wirkungsquerschnitt S:
ist gestreute Leistung einer Kugelwelle die in Richtung $\underline{e}_r$ mit Polarisation $\underline{e}$ in einem kleinen Raumwinkelelement, bezogen auf (geteilt durch) die der eingestrahlten Leistung mit $\underline{e}_0$ in Richtung $\underline{e}^0_r$



$$S = \frac{|\underline{e}\cdot\underline{E}_{st}|^2 r^2}{|\underline{e}_0\cdot\underline{E}_0|^2} = \frac{|\underline{e}\cdot\underline{D}_{st}|^2 r^2}{|\underline{e}_0\cdot\underline{D}_0|^2}$$

- korrigiert mit r^2 wegen der Abstrahlung in alle Richtungen.
- letzte Gleichung gilt, wenn man im Vakuum beobachtet ($\varepsilon_0 \underline{E} = D$)

Wir nehmen an $\delta\varepsilon \neq 0$, $\delta\mu = 0$ (keine magnetischen Momente)

$$\underline{A}_{st} = \frac{k^2}{4\pi}\int d^3r' \, e^{-ik\underline{e}_r\cdot\underline{r}'} \, \underline{e}_r \times (\delta\varepsilon(\underline{r}')\underline{D}^0_\omega(\underline{r}')\times\underline{e}_r)$$

Einsetzen von $\underline{D}^0_\omega(\underline{r}) = \underline{e}_0 D_0 e^{i\underline{k}_0\cdot\underline{r}}$

$$\underline{e} = \underline{e}_r\times(\underline{e}_0\times\underline{e}_r) = \underline{e}_0(\underline{e}_r\cdot\underline{e}_r) - \underline{e}_r(\underline{e}_r\cdot\underline{e}_0) = \underline{e}_0 - (\underline{e}_r\cdot\underline{e}_0)\underline{e}_r$$

$\Longrightarrow$ $\underline{e}\cdot\underline{e}_r = 0$ (die gestreute Welle ist im Vakuum transversal)

$$S = \left|\frac{\underline{e}\cdot\underline{A}_{st}}{D_0}\right|^2 = \frac{k^4}{(4\pi)^2}\left|\int d^3r' \, e^{i\underline{q}\cdot\underline{r}'} \, \underline{e}\cdot\underline{e}_0 \, \delta\varepsilon(\underline{r})\right|^2$$

$$\underline{q} = \underline{k}_0 - \underline{k}, \quad \underline{k} = k\,\underline{e}_r, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

damit hat man eine Formel zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes in erster Bornschen Näherung, jetzt Anwendung

2.) Rayleigh-Streuung in der Atmosphäre

- Modell für Lichtstreuung in der Atmosphäre (durch $\varepsilon(\underline{r})$):
- an Ortspunkten $\underline{r}_j$ sind Moleküle mit Dipolmomenten lokalisiert
- α_j ist Polarisierbarkeit (aus Bewegungsgl. eines Dipols im Feld extrahieren)

$$\underline{P}_\omega = \sum_j \delta(\underline{r}-\underline{r}_j)\,\underline{d}_j(\omega) = \sum_j \delta(\underline{r}-\underline{r}_j)\,\underbrace{\varepsilon_0\alpha_j(\omega)\,\underline{E}_\omega(\underline{r}_j)}_{=\underline{d}_j(\omega)}$$

$$\underline{D}_\omega = \varepsilon_0\varepsilon\,\underline{E}_\omega = \varepsilon_0\underline{E}_\omega + \underline{P}_\omega \;\leadsto\; \delta\varepsilon(\underline{r}) = \frac{P_\omega(\underline{r})}{\varepsilon_0 E_\omega(\underline{r})} = \sum_j \delta(\underline{r}-\underline{r}_j)\,\alpha_j(\omega)$$

es wird $\alpha_j(\omega)=\alpha_0$ konstant gesetzt (keine Resonanzen)

$$S = \frac{k^4}{16\pi^2}\,|\underline{e}_0\cdot\underline{e}|^2\,\alpha_0^2\left|\sum_j e^{iq\underline{r}_j}\right|^2$$

$$F(q) = \left|\sum_j e^{iq\underline{r}_j}\right|^2 = \sum_{ij} e^{iq(\underline{r}_i-\underline{r}_j)}$$ ist Strukturfaktor

müsste für die gegebene Struktur berechnet werden

Unterteilung:

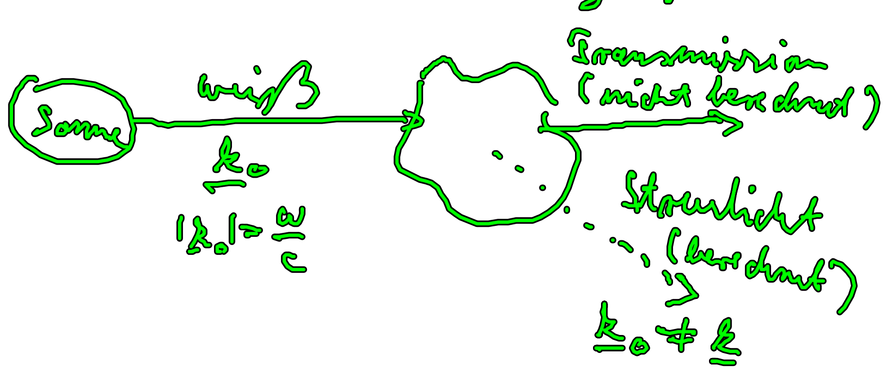
$$F(q) = \sum_{i=j} 1 + \sum_{i\neq j} e^{iq(\underline{r}_i-\underline{r}_j)}$$

Der zweite Term verschwindet aber, für eine zufällige Anordnung der Streuobjekte, der 1. Term ist N_0, die Zahl aller Moleküle

Einzige Frequenzabhängigkeit in S ist Vorfaktor

$$S \sim k^4 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

Diese Abhängigkeit bedeutet, daß weißes Licht (alle Farben) im Roten (ω klein) weniger als im Blauen (ω groß) aus seiner ursprünglichen Einfallsrichtung gestreut wird:



$$\underline{k} = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega}{c}$$

(a) Im Licht das nicht direkt von der Sonne kommt sondern vorher gestreut wurde, ist blau (ω_{blau}) stärker als rot ($\omega_{rot} < \omega_{blau}$) vertreten (Himmelsblau).

(b) In der Transmission wird blau (ω_{blau}) stärker als rot abgeschwächt $\alpha(\omega) \sim k^4$ (ohne Beweis) also bei langem Weg durch die Atmosphäre rot dominant (Abendrot).