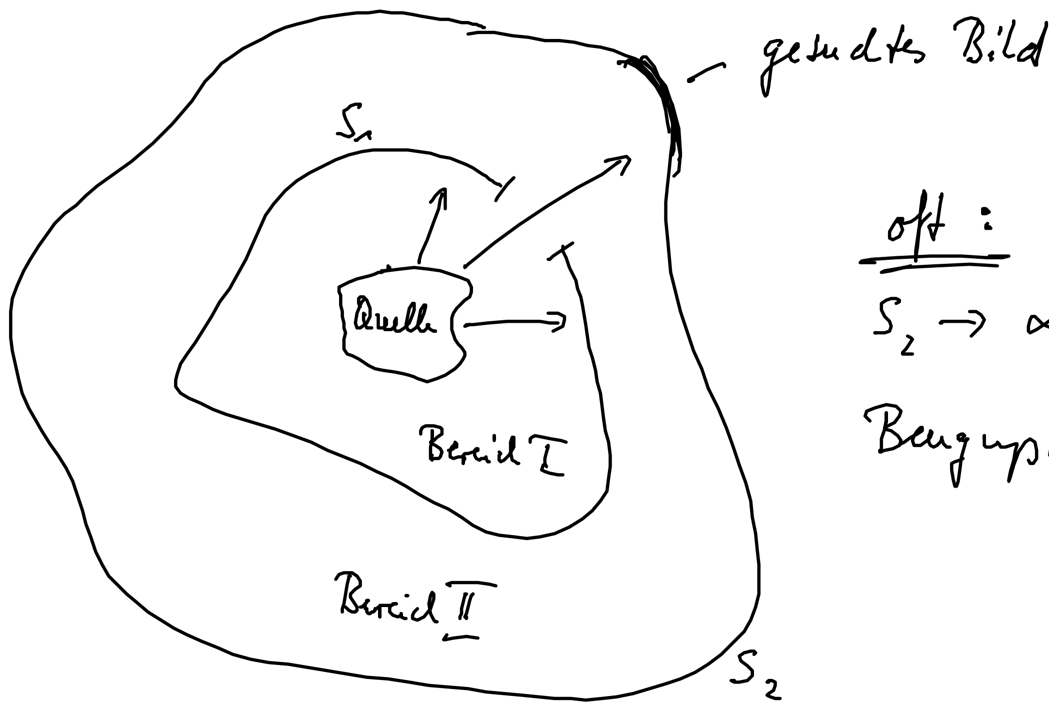
3. Beugungstheorie

- Beugung (engere Definition): Wechselwirkg. von Wellen mit Aperturen oder „Hindernissen" mit typischer Ausdehnung $a > \lambda$;
- wenn $a \leq \lambda$, so spricht man von Nahfeldoptik
- hier: Theorie f. skalares Feld $\psi(r, t)$, könnte eine Feldkomponente sein, vektorielle Theorie führt zu Verbesserung

Typische Situation: 2 Oberflächen S_1, S_2 gegeben



oft:
$S_2 \to \infty$ (Fernfeld)
Beugungsbild?

im freien Raum gilt die Wellengleichung f. das Feld ψ

$$(\Delta + k^2)\, \psi_\omega(\vec{r}) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad \text{(Helmholtzgl.)}$$

weglassen

d.h. Komponente des abgebeugten Felds

Greensche Funktion definieren: „leicht andere Def."

$$(\Delta + k^2)\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

nehmen wir als bekannt an

Versuch: $\psi(\vec{r})\Big|_{S_2} = \oint\!\!\oint_{S_1} d\vec{A} \cdot \vec{?}$ (Ziel)

→ Beziehg. zw. Flächen herleiten: 1. + 2. Greensche Identität

Herleitg. f. ein allgemeines, „gutartiges" Vektorfeld $\vec{C}$

$$\iiint_{II} dV'\, \vec{\nabla}' \cdot \vec{C}(\vec{r}\,') = \oint\!\!\oint_{S_1+S_2} d\vec{A}\,' \cdot \vec{C}(\vec{r}\,') \quad \text{(Gauß)}$$

$\vec{C} = \phi \vec{\nabla} \psi$; ϕ, ψ seien beliebige Funktionen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \phi \Delta \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

einsetzen, Greensche Id I folgt:

$$\boxed{\iiint dV' \left(\phi \Delta' \psi + \nabla' \phi \nabla' \psi \right) = \oint\!\!\oint d\vec{A}' \cdot \left(\vec{\nabla}' \psi\right) \phi}$$

zur II. Greensche Id. durch $\phi \leftrightarrow \psi$

$$\iiint dV' \left(\psi \Delta' \phi + \nabla' \phi \nabla' \psi \right) = \oint\!\!\oint d\vec{A}' \cdot \left(\nabla' \phi\right) \psi$$

subtrahieren voneinander gibt Greensche Id II:

$$\boxed{\underbrace{\iiint dV' \left(\phi \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi \right)}_{\underbrace{\psi(\vec{r})}_{?}} = \underbrace{\oint\!\!\oint d\vec{A}' \left(\phi \cdot \vec{\nabla}' \psi - \psi \cdot \vec{\nabla}' \phi \right)}_{?}}$$

ϕ, ψ waren bisher frei wählbare Funktionen

$\psi(\vec{r}')$: soll gesuchte Feldkomponente sein

$\phi(\vec{r}') := G(\vec{r}, \vec{r}')$

Parameter (heimlich in ϕ mitgeschleppt)

linke Seite:

$$\int dV' \left(G(\vec{r},\vec{r}\,')\, \Delta' \psi(\vec{r}\,') - \psi(\vec{r}\,')\, \Delta' G(\vec{r},\vec{r}\,') \right)$$

nach Helmholtz:

$$= \int dV' \left(\underbrace{G(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot (-k^2 \psi(\vec{r}\,'))}_{*} - \psi(\vec{r}\,')\left(-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \underbrace{k^2 G(\vec{r},\vec{r}\,')}_{**}\right) \right)$$

$$* + ** = 0$$

$$= \psi(\vec{r}) = \text{linke Seite!}$$

rechte Seite

$$\Rightarrow \quad \psi(\vec{r}) = \oiint_{S_1+S_2} dA' \left(G(\vec{r},\vec{r}\,')(\vec{n}\,'\cdot\vec{\nabla}')\, \psi(\vec{r}\,') - \psi(\vec{r}\,')(\vec{n}\,'\cdot\vec{\nabla}')\, G(\vec{r},\vec{r}\,') \right)$$

$\vec{n}\,'$ ist der Normalenvektor des Oberflächenelements $d\vec{A}\,'$ an der Stelle $\vec{r}\,'$. $\vec{n}\,' = \vec{n}\,'(\vec{r}\,')$.

rechts noch weiter manipulieren, G einsetzen:

a) $$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi\, |\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$, siehe VL zu retardiert Potentialen

b) S_2 nach ∞ schieben, $\Psi(\vec r\,') \to 0$

$\longrightarrow$ nur über S_1 integrieren

c) G einsetzen : $\vec n\,' \cdot \vec\nabla\,' \dfrac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{4\pi |\vec r - \vec r\,'|} = ?$

ausrechnen nach Produktregel

$$= \frac{1}{4\pi}\, \vec n\,' \cdot \left(ik \frac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{|\vec r - \vec r\,'|} \nabla' |\vec r - \vec r\,'| + e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}\, \vec\nabla\,' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} \right)$$

$$\vec\nabla\,' |\vec r - \vec r\,'| = - \frac{\vec r - \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|}, \quad \vec\nabla\,' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = \frac{\vec r - \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|^3}$$

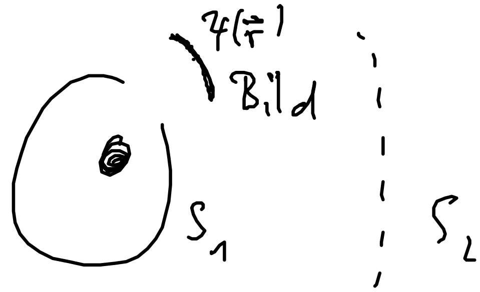
d) $\vec n\,'$ drehen um $180°$

$\longrightarrow$ Vorzeichen in Formel

$$\underline{\underline{\psi(\vec{r})}} = -\frac{1}{4\pi} \oiint_{S_1} dA' \, \frac{e^{ikR}}{R} \, \vec{n}' \cdot \left(\vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\vec{R}}{R} \, \psi(\vec{r}') \right)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \, , \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

man kann $\psi(\vec{r})$ in Bereich $\underline{II}$ durch Kenntnis von $\psi(\vec{r}')$ auf S_1 bestimmen.



auf S1 ist Feld immer noch unbekannt, daher jetzt Kirchhoffsche Annahme machen:

Auf S_1 gilt:

1.) außerhalb von Öffnungen ist $\psi(\vec{r}') = 0$, $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') = 0$

2.) innerhalb von Öffnungen ist $\psi(\vec{r}')$, $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') =$ dem Wert die durch eine ungestörte Quelle hervorgerufen werden würden

(1. Bornsche Näherung)

Bemerkg.: Annahmen sind eigentlich schlecht, denn konsequenterweise kann das zu Nullfeldern führen wenn sich Mathematiker drüber macht & denkt

Trotzdem: Exp. oft gut beschreiben!

oft werden aber Randbedingg. in $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ eingebaut

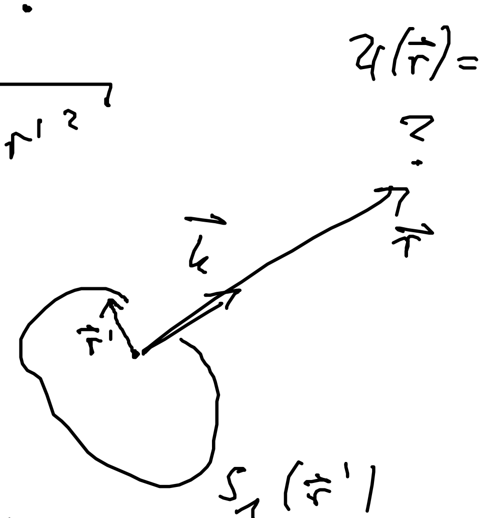
$\longrightarrow$ Beruhigung d. Mathematiker

jetzt noch Fernfeldnäherung $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$:

$$kR = k|\vec{r}-\vec{r}\,'| = k\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,' + r'^2}$$

$$= kr\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^2} + \frac{\vec{r}\,'^2}{r^2}}$$

$$\simeq \underbrace{kr - k\vec{r}\,'\cdot\frac{\vec{r}}{r}}_{\text{Fraunhofer-Beugg.}} + \underbrace{\ldots}_{\text{Fresnelbeugg.}}$$



$$\vec{k} = k\frac{\vec{r}}{r} = k\vec{e}_r$$

Fraunhofer-Beugungs-Formel

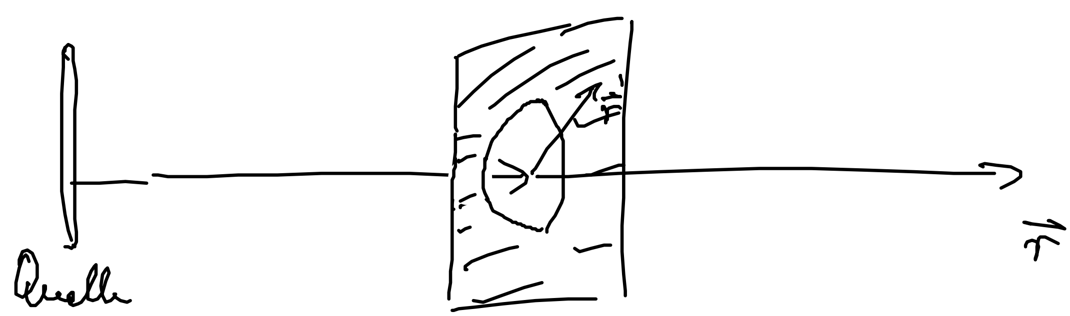
$$\psi(\vec{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \iint_{S_1} dA' \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \left(\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \psi^{(0)}(\vec{r}') + i\vec{k}\cdot\vec{n}' \psi^{(0)}(\vec{r}') \right)$$

S_1 (Öffng.)

ungestört

erlaubt jetzt durch Annahme v. $\psi(\vec{r}')$ auf Rand $\psi(\vec{r})$ im Fernfeld zu berechnen.

4. Beispiel Beugg. durch Kreisapertur



Annahme: ebene Welle in Öffnung

$\psi_0(\vec{r}') = E_0 \, e^{ikz'}$ ist Lsg. der Helmholtzgl. im freien Raum

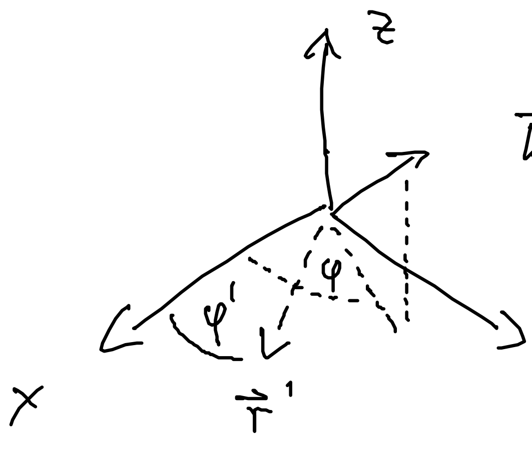
→ rechts einsetzen in Fraunhoferformel

$$\underbrace{\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}'}_{\vec{e}_z \partial_z} \psi(\vec{r}') = ik E_0 \, e^{ikz'}$$

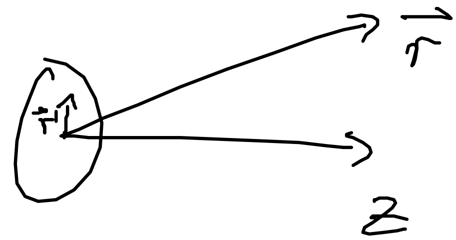
→ an Stelle S_1 einsetzen ($z' = 0$)

$$\psi(\vec r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\underbrace{\int d\varphi'\int d\rho'\rho'}\, e^{-i\vec k\cdot\vec r\,'} E_0\left(ik + i\vec k\cdot\vec e_z\right)$$

Oberflächenintegral über Kreisapertur, Radius R_0



$$\vec k = \vec e_r\, k$$



Apertur in x-y Ebene

$$\vec k = k\vec e_r = k\left(\cos\varphi\sin\vartheta,\ \sin\varphi\sin\vartheta,\ \cos\vartheta\right)$$

$$\vec r\,' = \rho'\left(\cos\varphi',\ \sin\varphi',\ 0\right)$$

$$\vec k\cdot\vec r\,' = k\rho'\sin\vartheta\,(\underbrace{\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'}_{\cos(\varphi-\varphi')})$$

$$\psi(\vec r) = -i\frac{e^{ikr}}{4\pi r}E_0\int_0^{R_0} d\rho'\rho'\int_0^{2\pi} d\varphi'\, e^{-ik\rho'\cos(\varphi-\varphi')\sin\vartheta}\, k(1+\cos\vartheta)$$

mit $\int_0^{2\pi} d\varphi' \, e^{-ik\rho' \cos(\varphi-\varphi') \sin\vartheta} = 2\pi J_0(k\rho' \sin\vartheta)$

Besselfunktion 0-ter Ordnung.
(Zylinderfkt 1. Gattg., 0-ter Ordnung)

$$= -i \frac{kE_0 e^{ikr}}{2r} \int_0^{R_0} d\rho' \rho' J_0(k\rho' \sin\vartheta)(1+\cos\vartheta)$$

1. Ordnungs Besselfkt

$$\psi(\vec r) = -i \frac{kE_0 R_0^2 e^{ikr}}{r} \frac{(1+\cancel{\cos\vartheta})}{2} \frac{J_1(kR_0 \sin\vartheta)}{kR_0 \sin\vartheta}$$

verbesserte Theorie f. Kirchhoff-Beugung.
eliminiert $\cos\vartheta$-Term ✗ !

<u>Bemerkungen</u>: zur kreisförmigen Blende mit Radius R_0:

a) Intensität: $|E_\omega|^2(\rho) = \left|\frac{J_1(kR_0\rho/r)}{kR_0\rho/r}\right|^2$

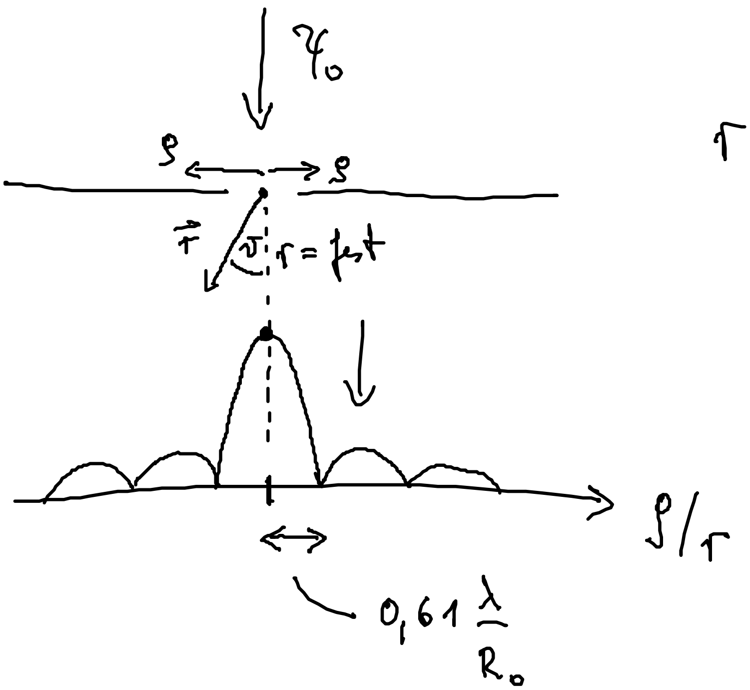
$\Psi(\vec{r}) = \Psi_\omega(r)$

$\sin\vartheta = \frac{\rho}{r}$

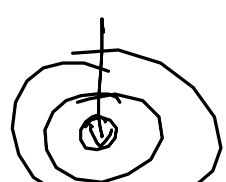
analog $\frac{\sin x}{x}$

r = fest

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$



man findet also Airy-Scheibchen, = konzentrische Intensitätsmodulationen auf Schirm



b) Frequenz der Oszillationen $\sim kR_0 \sim \frac{R_0}{\lambda} \sim$ Abklingen

(i) $kR_0 \gg 1$ größe Öffng. im Vgl. zu λ

$\rightarrow$ geringer Kontrast, weil schnelles Abklingen der Kurve

(ii) $k \cdot R_0 \simeq 1$ Öffnung in Größenordnung der Wellenlänge

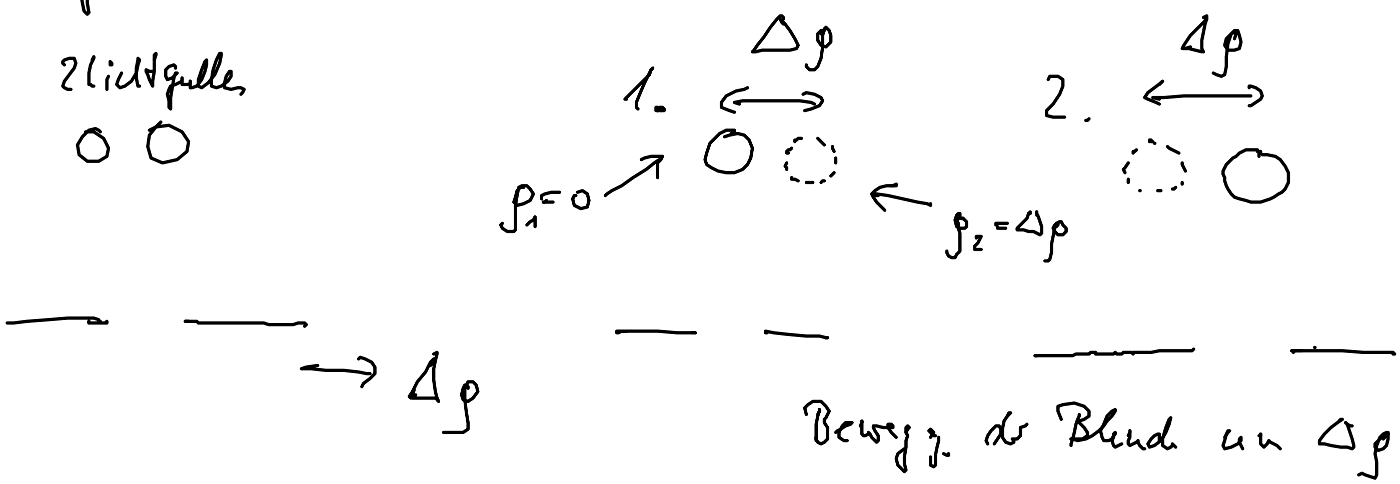
→ starker Kontrast, weil Abklingen „erhalten"

(iii) $k \cdot R_0 \ll 1$, $\lambda \gg R_0$ → falsche Ergebnisse

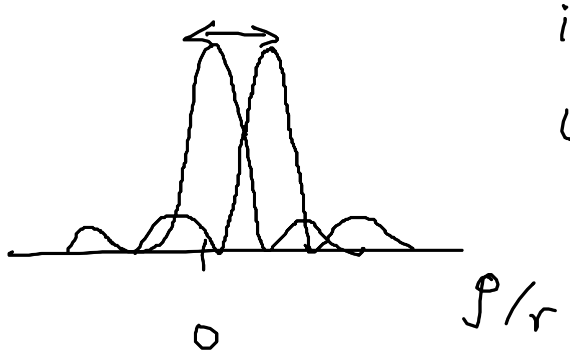
(siehe H. Bethe, 40er Jahre)

c) das Ergebnis f. Lochblende ist von fundamentaler Bedeutg. f. Auflösungsvermögen optischer Geräte

einfachster Ansatz:



1) Fall 2 Fall um $\Delta\rho$ verschobenes Bild der Punkte ist noch getrennt wahrnehmbar, wenn $\Delta\rho \simeq 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} r$



$\Delta\rho$

Man sagt, daß 2 Pkte noch optisch trennbar sind (auflösbar) sind, wenn 1. Maximum des 1. Pkts in das erste Minimum des 2. Pkts fällt.

maximale Auflösung: $\Delta\rho = 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} r > \underline{\underline{0{,}61\lambda}}$

Abstand $\qquad \frac{r}{R_0} \gg 1$

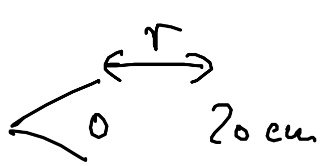
$$\to \Delta\rho \geq 0{,}61\lambda \approx \frac{\lambda}{2}$$

$\Delta\rho = \frac{\lambda}{2}$ ist der minimale Abstand von 2 beobachtbaren Punkten die getrennt detektiert werden sollen / können.

<u>Auge</u> als Bsp.: Pupille $R_0 = 2\,\text{mm}$

$r = 20\,\text{cm}$

$\lambda = 500\,\text{nm}$



$$\Delta \rho = 0.6 \cdot \lambda \frac{200\,\mathrm{mm}}{2\,\mathrm{mm}} = 0.6 \cdot 500\,\mathrm{nm} \cdot 100 \simeq \underline{\underline{30\,\mu\mathrm{m}}}$$

$\Rightarrow$ Kriterium wird in der Nahfeldoptik außer Kraft gesetzt! $r, R_0 \lesssim \lambda$

Fernfeld?

$\rightarrow$ Analyse schwer u. umstritten