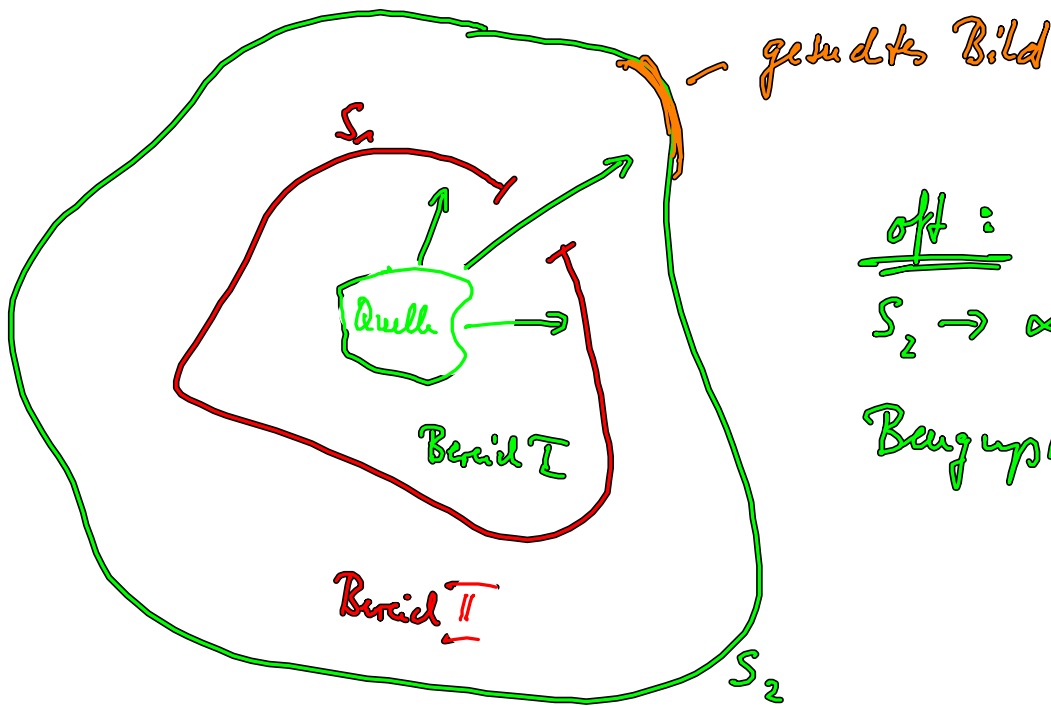




### 3. Bergungslehre

- Beugung (enger Definition): Lichtwirg. von Kante mit Aperturen  
oder „Hindernissen“ mit typischer Ausdehnung  $a > \lambda$ ;
- wenn  $a \leq \lambda$ , so spricht man von Nahfeldoptik
- hier: Theorie f. skalares Feld  $\mathcal{F}(r, t)$ , könnte eine  
Feldkomponente sein, vektorielle Theorie führt zu Verbesserung

Typische Situation: 2 Oberflächen  $S_1, S_2$  gegeben



oft:  
 $S_2 \rightarrow \infty$  (Trafeld)  
 Beugungsbild?

im freien Raum gilt die Wellengleichung f. das Feld  $\mathcal{F}$

$$(\Delta + k^2) \mathcal{F}_\omega(\vec{r}) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{Helmholtzgl.})$$

↙ vergessen

eine Komponente des abgebeugten Feldes

Green'sche Funktion definieren: „billig andere Def.“

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

nehmen wir als bekannt an

Voraus.:  $\int_{S_2} \psi(\vec{r}) \vec{n} \cdot d\vec{A} = \iiint_{S_1} dV \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{c}$  (Ziel)

→ Beziehg. zw. Fläche herleiten: 1.+2. Green'sche Identität

Herleitung f. ein allgemeines, „gutartiges“ Vektorfeld  $\vec{c}$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} dV' \vec{\nabla}' \cdot \vec{c}(\vec{r}') = \iint_{S_1 + S_2} d\vec{A}' \cdot \vec{c}(\vec{r}') \quad (\text{Gauß})$$

$\vec{c} = \phi \vec{\nabla} \psi$ ;  $\phi, \psi$  seien beliebige Funktionen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{c} = \phi \Delta \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

einsetzen, Green'sche Id I folgt:

$$\iiint dV' (\phi \Delta' \psi + \nabla' \phi \cdot \nabla' \psi) = \iint d\vec{A}' \cdot (\vec{\nabla}' \psi) \phi$$

zur II. Grenze Id. durch  $\phi \leftrightarrow \psi$

$$\iiint dV' (\psi \Delta' \phi + \nabla' \psi \cdot \nabla' \phi) = \iint d\vec{A}' \cdot (\nabla' \phi) \psi$$

subtrahiere voneinander gibt Grenzwerte Id III:

$$\iiint dV' (\phi \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi) = \iint d\vec{A}' (\phi \cdot \vec{\nabla}' \psi - \psi \cdot \vec{\nabla}' \phi)$$

$$\underbrace{\psi(\vec{r})}_{?} = \underbrace{?}_{\downarrow}$$

$\phi, \psi$  waren bisher frei wählbare Funktionen

$\psi(\vec{r})$ : soll gesuchte Feldkomponente sein

$$\phi(\vec{r}) := G(\vec{r}, \vec{r}')$$

↗

# Parameter (hierher in $\phi$ mitgeschleppt)

linke Seite:

$$\int dV' \left( G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') \right)$$

nach Helmholtz:
↓

$$= \int dV' \left( \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot (-k^2 \psi(\vec{r}'))}_{*} - \psi(\vec{r}') \left( \underbrace{-\delta(\vec{r} - \vec{r}')}_{*} - \underbrace{k^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}_{**} \right) \right)$$

\* + \*\* = 0

$= \psi(\vec{r}) =$  linke Seite!

rechte Seite

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = \underbrace{\iint_{S_1 \cup S_2} dA'}_{\text{Satz}} \left( G(\vec{r}, \vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') G(\vec{r}, \vec{r}') \right)$$

$\vec{n}'$  ist der Normalektor des Oberflächelements  $d\vec{A}'$  an der Stelle  $\vec{r}'$ .  $\vec{n}' = \vec{n}'(\vec{r}')$ .

noch mal weiter manipulieren,  $G$  einsetzen:

a)  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$ , siehe VL zu retardiert Potentials

b)  $S_2$  nach  $\infty$  schieben,  $\varphi(\vec{r}') \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  nur über  $S_1$  integrieren

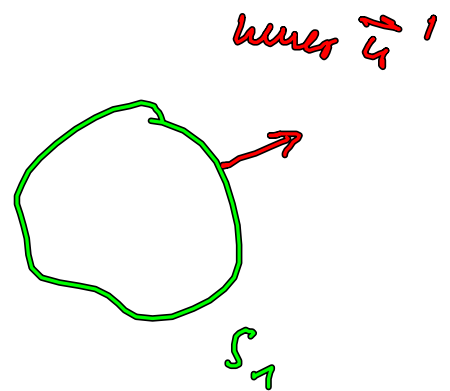
c) Greensatz:  $\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ?$

Ausrechnen nach Produktregel

$$= \frac{1}{4\pi} \vec{u}' \cdot \left( ik \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' |\vec{r}-\vec{r}'| + e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$\vec{\nabla}' |\vec{r}-\vec{r}'| = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

d)  $\vec{u}'$  drehe um  $180^\circ$

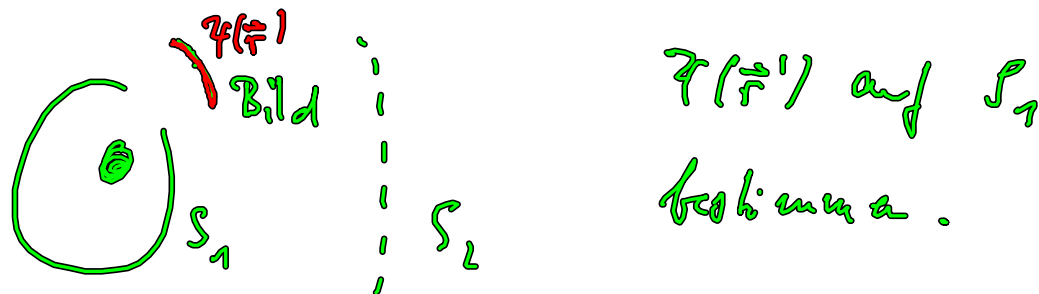


$\rightarrow$  Vorzeichen in Formeln

$$\underline{\underline{\varphi(\vec{r})}} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} dA' \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}' \cdot \left( \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') + ik \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{kR} \\ kR \end{pmatrix} \frac{\vec{R}}{R} \varphi(\vec{r}') \right)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

man kann  $\varphi(\vec{r})$  in Beil. 4 durch Kenntnis von



auf  $S_1$  ist Feld innen noch unbekannt, daher folgt

Kirchhoffsche Annahmen machen:

Auf  $S_1$  gilt:

1.) außerhalb von Öffnungen ist  $\varphi(\vec{r}') = 0$ ,  $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') = 0$

2.) innerhalb von Öffnungen ist  $\varphi(\vec{r}')$ ,  $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') =$

der Wert die durch eine ungestörte Quelle hervorgeru-  
fen werden würde

(1. Bornsche Nähg.)



Bem. 1: Annahme sind eigenh. Wellen, die konsequent weiter kommen das zu Nullfeldern führen wenn sie Metrumetiker drüber und durch

Trotzdem, Exp. oft gut beschreibbar!

oft wird aber Randbedingg. in  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  eingebaut

→ Berücksichtigung der Metrumetiker

gibt noch Fernfeldnäherung  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ :

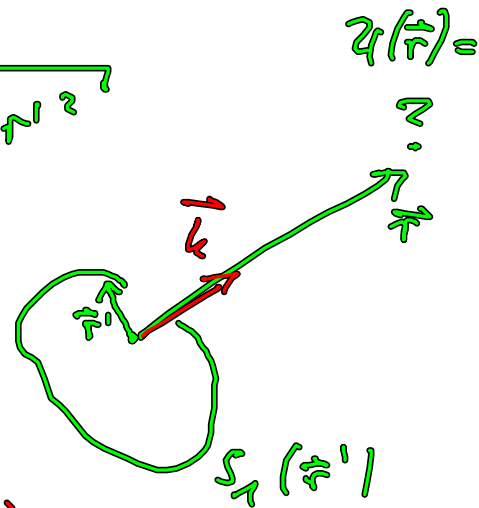
$$kR \approx k|\vec{r} - \vec{r}'| = k\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}$$

$$= kr \sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$$\approx kr - k\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} + \dots$$

Fraunhofer-Begg.

Fresnelbegg.



$$\vec{k} = k \frac{\vec{r}}{r} = k \vec{e}_r$$

Fraunhofer - Beggung, Formel

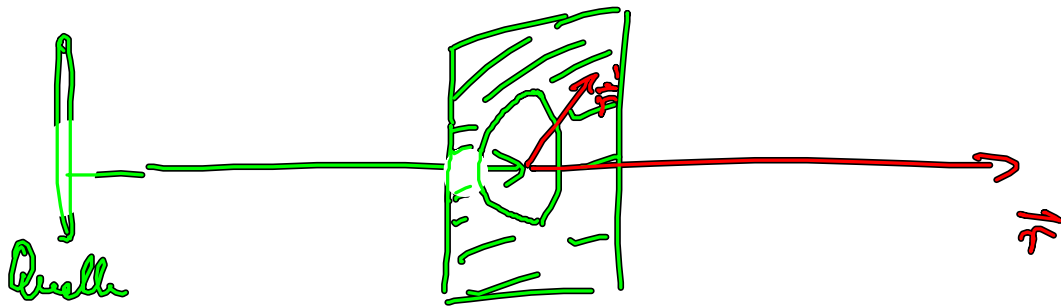
$$\psi(\vec{r}) = - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \iint_{S_{\vec{r}}} dA' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \left( \underbrace{\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}'}_{(0)} \psi(\vec{r}') + i\vec{k} \cdot \underbrace{\vec{u}'}_{(1)} \psi(\vec{r}') \right)$$

(Öffn.)

ungestört

Man benötigt die Annahme v.  $\psi(\vec{r}')$  auf Rand  $\psi(\vec{r})$  im Fernfeld zu berechnen.

#### 4. Beispiel Bugg. durch Kreisapertur



Annahme: eben Wellen in Öffnung

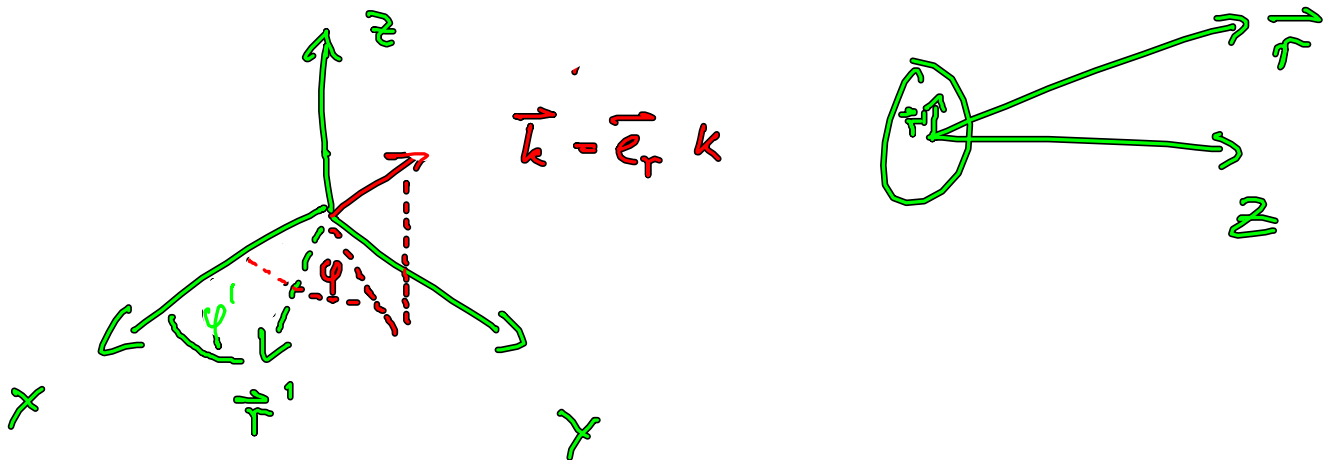
$\psi_0(\vec{r}') = E_0 e^{ikz'}$  ist Lsg. des Helmholtzgl. in freier Raum

→ nach Einsetzen in Fraunhoferformel

$$\underbrace{\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}'}_{\vec{e}_z \partial_z} \psi(\vec{r}') = ik E_0 e^{ikz'} \rightarrow \text{an Stelle } S_1 \text{ einsetzen } (z' = 0)$$

$$\psi(\vec{r}) = - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \underbrace{\int d\varphi' \int dp' p'}_{\text{Oberfl. integriert über Kreisapertur, Radius } R_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} E_0 (ik + i\vec{k} \cdot \vec{e}_z)$$

Oberfl. integriert über Kreisapertur, Radius  $R_0$



Apertur in  $x-y$  Ebene

$$\vec{k} = k \vec{e}_r = k (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

$$\vec{r}' = \rho' (\cos \varphi', \sin \varphi', 0)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = k \rho' \sin \vartheta \underbrace{(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')}_{\cos(\varphi - \varphi')}$$

$$\psi(\vec{r}) = -i \frac{e^{ikr}}{4\pi r} E_0 \int_0^{R_0} dp' p' \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-ik \rho' \cos(\varphi - \varphi') \sin \vartheta} k (ik + \cos \vartheta)$$

$$\text{mit } \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-i k \rho' \cos(\varphi - \varphi')} \sin\vartheta = 2\pi J_0(k \rho' \sin\vartheta)$$

↑  
Besselfunktion 0-ter Ordnung.  
(Zylinder fkt 1. Art, 0-ter Ordnung)

$$= -i \frac{k E_0 e^{i k r} R_0}{2r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \rho' J_0(k \rho' \sin\vartheta) (1 + \cos\vartheta)$$

$$\psi(r) = -i \frac{k E_0 R_0^2 e^{i k r}}{r} \frac{(1 + \cancel{\cos\vartheta})}{2} \frac{J_1(k R_0 \sin\vartheta)}{k R_0 \sin\vartheta}$$

1. Ordnung Bessel fkt

verbesserte Theorie f. Kretzbeugung.

eliminiert  $\cos\vartheta$ -Terme ~~X~~ !

Bemerkung: zur kreisförmigen Blende mit Radius  $R_0$ :

a) Intensität:  $|E_0|^2(\rho) = \left| \frac{J_1(k R_0 \rho/r)}{k R_0 \rho/r} \right|^2$

$\varphi(r) = \varphi_0(r)$

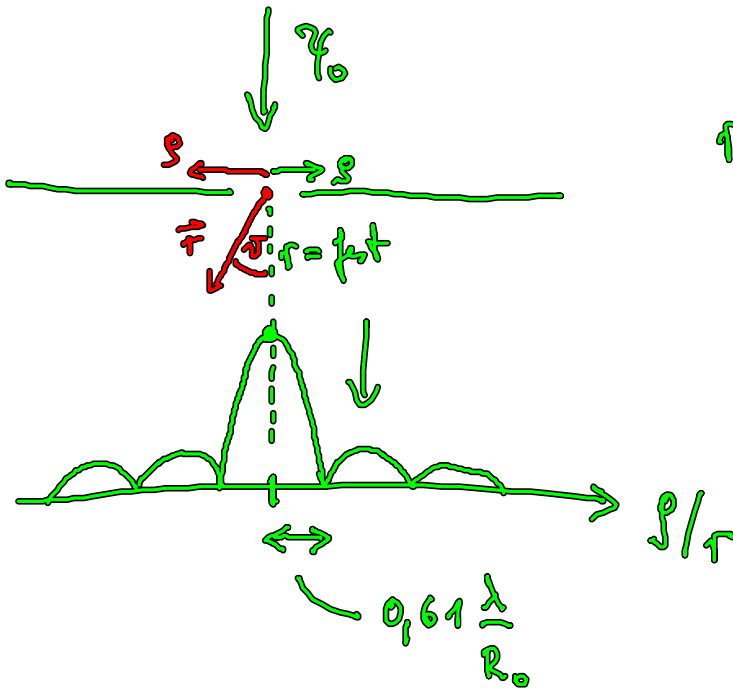
$\sin \vartheta = \frac{\rho}{r}$

analog

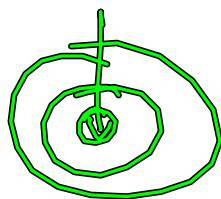
$\frac{\sin x}{x}$

$r = \text{fest}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$



man findet also Airy-Scheibchen, = kurze bische Intensitätsmodulation auf Schirm



b) Frequenz der Oszillationen  $\sim k R_0 \sim \frac{R_0}{\lambda} \sim$  Abbinde

(i)  $k R_0 \gg 1$  große Öffnung im Vgl zu  $\lambda$

$\rightarrow$  geringe Kontrast, weil schneller Abkling der Kurve

(ii)  $k \cdot R_0 \approx 1$  Öffnung in Größe ordnung der Wellenlänge

→ hohe Kontrast, weil Abblende "schalter"

(iii)  $k \cdot R_0 \ll 1, 1 \gg R_0 \rightarrow$  falsche Ergebnisse

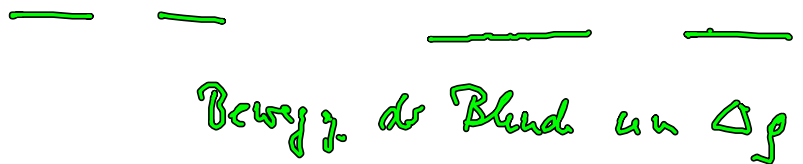
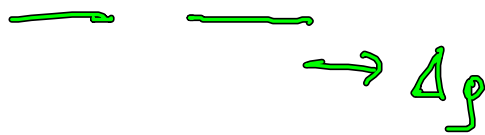
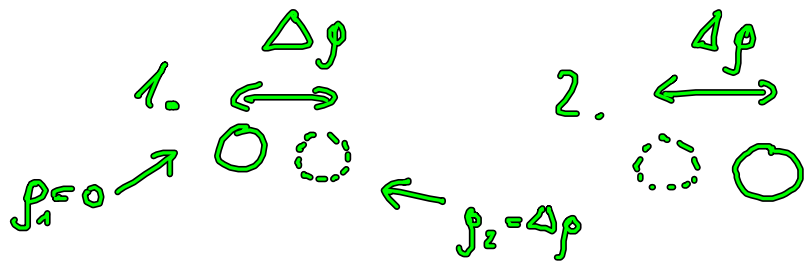
(siehe H. Beth, 40er Jahre)

c) das Ergebnis f. Lochblende ist von fundamentaler

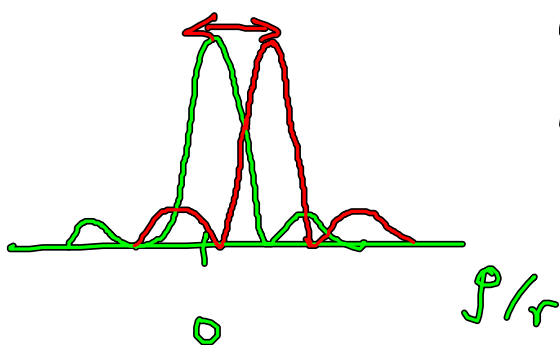
Bedeutung f. Auflösungsvermögen optischer Geräte

einfachster Ansatz:

2 Lichtquellen  

1) Fall



2) Fall

um  $\Delta p$  verschobenes Bild des Punktes ist hoch getrennt wahrnehmbar,

$$\text{wenn } \Delta p \approx 0,61 \frac{\lambda}{R_0}$$

$$\Delta \varrho$$

Man sagt, daß 2 Plts noch optisch trennbar sind (auflösbar) sind, wenn 1. Maximum der 1. Plts in das erste Minimum der 2. Plts fällt.

$$\text{maximale Auflösung: } \Delta \varrho = 0,61 \frac{\lambda}{R_0} r > \underline{\underline{0,61 \lambda}}$$

↑  
Abstand

$$\frac{r}{R_0} \gg 1$$

$$\rightarrow \Delta \varrho \geq 0,61 \lambda \approx \frac{\lambda}{2}$$

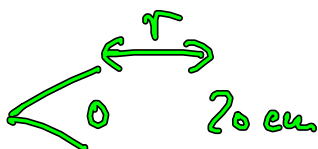
$\Delta \varrho = \frac{\lambda}{2}$  ist der minimale Abstand von

2 beobachtbare Punkte die getrennt detektiert werden sollen / können.

Auge als Bsp.: Pupille  $R_0 = 2 \text{ mm}$

$$r = 20 \text{ cm}$$

$$\lambda = 500 \text{ nm}$$

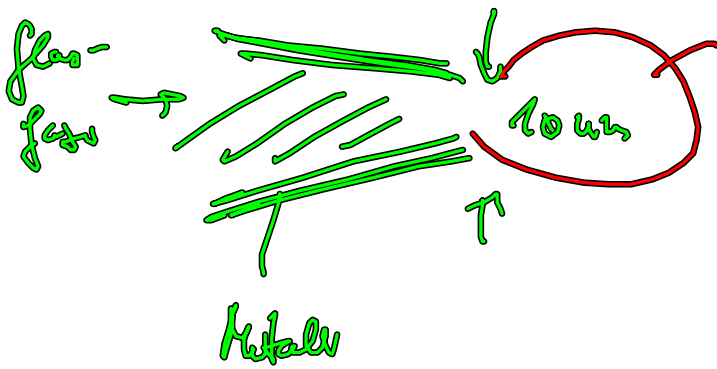


$$\Delta p = 0.6 \cdot \lambda \frac{200 \text{ nm}}{2 \text{ nm}} = 0.6 \cdot 500 \text{ nm} \cdot 100 = \underline{\underline{30 \mu\text{m}}}$$

⇒ Keine Licht in die Nahfeldoptik  
außer Kraft gesetzt!  $r, R_0 \leq \lambda$

Nahfeld?

→ Analyse schwer u. unstrukt.



$\sim 10 \text{ nm}$

Atom

Verbesserung der Auflösung