5. Geometrische Optik (Strahloptik)

gültig, wenn Wellencharakter d. Lichts keine Rolle spielt

1) $\lambda \to 0$ geometrische Strukturen $\gg$ Wellenlänge

2) Skalares Feld annehmen

$$\left(\Delta + k_n^2 \right) \psi(\vec{r}, \omega) = 0$$

$$k_n = \frac{\omega}{c} n(\vec{r}) = k\, n(\vec{r})$$

Brechzahl sei ortsabhängig

3. Schwache räumliche Veränderung der Brechzahl

$$| \nabla n(\vec{r}) | \ll \frac{n}{\lambda} \quad (\lambda \to 0)$$

Idee $\psi(\vec{r}, t) \to$ Strahl abbilden

Ansatz f. „Eikonal“: $\underset{\omega}{\psi}(\vec{r}) = A(\vec{r})\, e^{ik S(\vec{r})}$

zerlege Feld in Amplitude und Phase

$S(\vec{r}) \mathrel{\hat{=}}$ Eikonal

Ansatz beinhaltet nur vorwärtslaufende Wellen (Näherg.)

Einsetzen in Helmholtzgleichung:

$$\vec{\nabla}\Psi(r) = \left(\vec{\nabla}A(\vec{r})\right)e^{ikS(\vec{r})} + A(\vec{r})\, ik \left(\vec{\nabla}S(\vec{r})\right)e^{ikS(\vec{r})}$$

$$\Delta\Psi = (\Delta A)e^{ikS} + 2ik(\vec{\nabla}S)\cdot(\vec{\nabla}A)e^{ikS} - k^2A(\vec{\nabla}S)^2e^{ikS} + ikA\Delta S e^{ikS}$$

$$\left(k_n^2\Psi + \Delta\Psi\right) = 0 = k^2\left(n^2 - (\nabla S)^2\right)e^{ikS} + ik\left(\Delta S A + 2(\nabla A)\cdot(\nabla S)\right)e^{ikS}$$

vernachlässigen: $\Delta A e^{ikS}$, weil zweiter Ordnung in der Amplitude, hoffen, daß die Phase S die Ausbreitg. ordentlich beschreibt (k-Vektor → Strahlrichtg.)

man findet die Eikonalgleichungen:

$$(\nabla S(\vec{r}))^2 = n^2(\vec{r}) \quad ; \quad 2\nabla(\ln A(\vec{r}))\cdot\vec{\nabla}S(\vec{r}) = -\Delta S(\vec{r})$$

durch Re, Im $= 0$.

Lösungsprinzip: man gibt $n(\vec{r})$ vor

z.B. Luftmoleküle als Fkt. der Höhe

löst damit die erste Gleichg. $\rightarrow S(\vec{r})$

$S(\vec{r})$ in 2. Gleichg. einsetzen $\rightarrow A(\vec{r})$

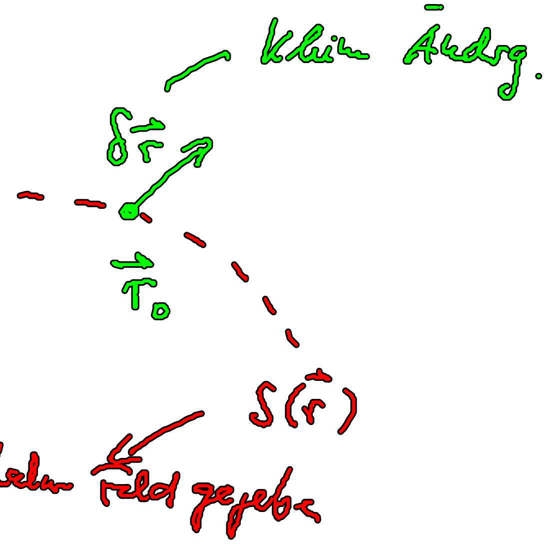
Nutzen: $\Psi(\vec{r}) = A(\vec{r})\, e^{ikS(\vec{r})}$

können berechnet werden!

$S(\vec{r})$ wird als Führungswelle eines Lichtstrahls interpretiert:

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}_0 + \delta\vec{r})$$

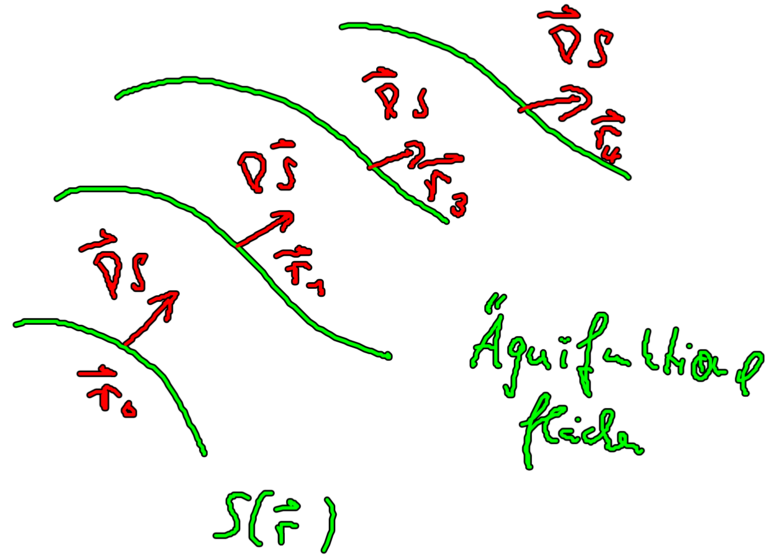
$$\approx \underbrace{A(\vec{r}_0)}_{\text{sowieso schwache Veränderg. (0.-ter Term)}}\, e^{ikS(\vec{r}_0)}\, \underbrace{e^{ik\vec{\nabla}S(\vec{r}_0)\cdot\delta\vec{r}}}_{*}$$



Dies (*) ist eine ebene Welle am Ort $\vec{r}_0$

mit dem Wellenvektor $k\vec{\nabla}S(\vec{r}_0)$, die sich um

$\delta\vec r$ anbringt:



Lichtstrahlen sind also Kurven für die $\vec\nabla S$ in jedem Punkt $\vec r$ eine Tangente an die Strahlrichtung ist.

„S <u>führt</u> den Lichtstrahl über seinen Gradienten."

Einheitsvektor in die Richtg. d. Strahls am Ort $\vec r$: $\vec\sigma = \dfrac{\vec\nabla S(\vec r)}{n(\vec r)}$

Normierung aus der 1. Eikonalgl. $(\vec\nabla S)^2 = n^2$

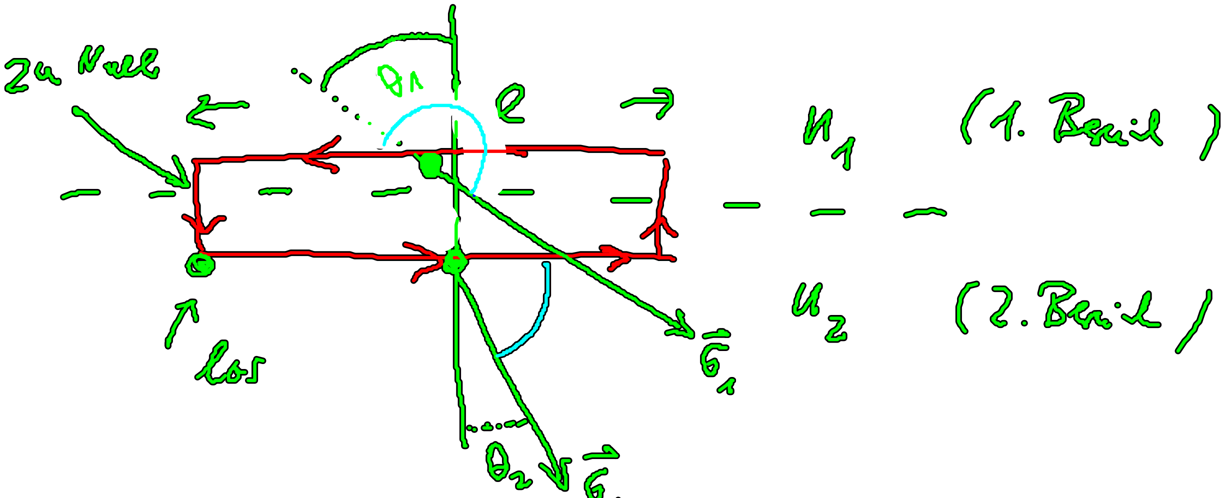
weil $\vec\nabla \times \left(n(\vec r)\,\vec\sigma(\vec r) \right) = 0 \quad (\vec\nabla \times \vec\nabla \ldots \equiv 0)$

$\rightarrow$ Integral $\displaystyle\int_1^2 d\vec r \cdot \left(n(\vec r)\,\vec\sigma(\vec r) \right)$ = unabhängig Weg

<u>2 Beispiele</u>

a) Grenzfläche ansehen:

2 konstante Brechzahlen n_1, n_2



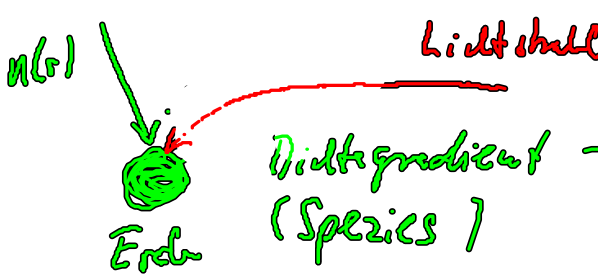
Integral über diesen Weg muß verschwinden wenn Vektorfeld verschwindende Rotation hat:

$$\oint = 0 = \oint d\vec{r} \cdot n(\vec{r})\, \vec{\sigma}(\vec{r})$$

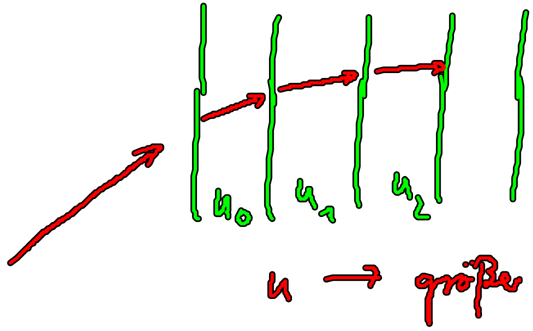
$$= n_1 \ell \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi - \theta_1\right) + n_2 \ell \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta_2\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$ = Brechungsgesetz!

b) Ausbreitung des Lichts in Umgebung der Erde



Dichtegradient → Brechzahlgradient
(Spezies)



VIII Führung / Speicherung elektromagnetischer Strahlung

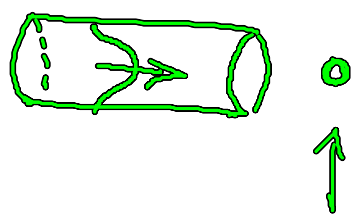
Resonatoren, Wellen leiter

↙ Speicherung

↘ Führung

man benötigt Medien, Strukturen, die em. Feld „fangen".

aktives Medium



zu untersuchendes Medium

z.B. Laser,
Quantenelektrodynamik
(1 Photon macht den Unterschied!)

z.B. Glasfaser

Mikrowellen: metallische Strukturen

Infrarot / optisch: dielektrische Fasern (wenig Absorption)

man kann heutzutage Strukturen „designen".

1. Felder an der Oberfläche von perfekten Leitern

Oberfläche sind nötig um Resonatoren / Wellenleiter zu designen.

ideale Leiter:

a) keine Dämpfung:

$$\sigma_L = -i\varepsilon_0 \omega \chi(\omega) \,, \quad \chi(\omega) = -\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \xrightarrow[\omega \to 0]{} \infty$$

Leitfähigkeit

$\gamma \to 0$

b) ein idealer Leiter sieht nur $\omega \to 0$

alle Felder sind ∞ langsam

$$e^{i\omega t} \xrightarrow[\omega \to 0]{} 1$$

$$\to \vec{j}_L = \sigma_L \vec{E}_L \to \text{soll endlich sein,}$$

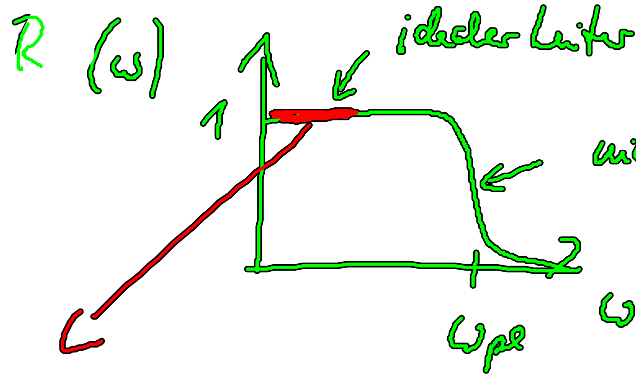
∞ Strom ist unphysikalisch

$\sigma_L \to \infty$ bedeutet $\vec{E}_L \to 0$

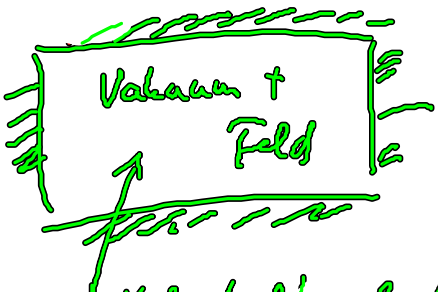
$\Rightarrow$ In einem idealen Leiter muß das

E-Feld verschwinden.

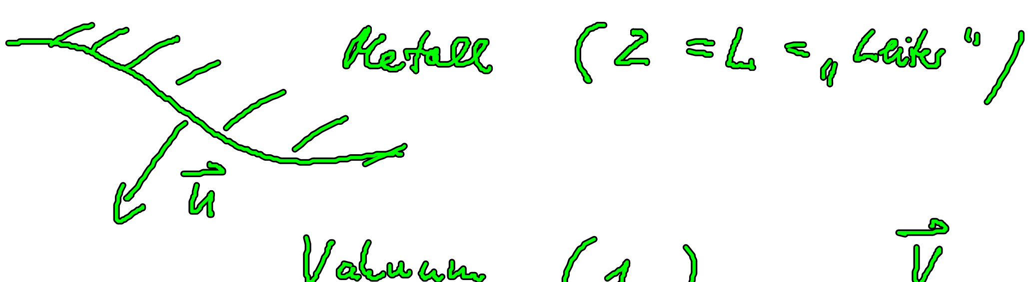
Siehe Fresnelformeln

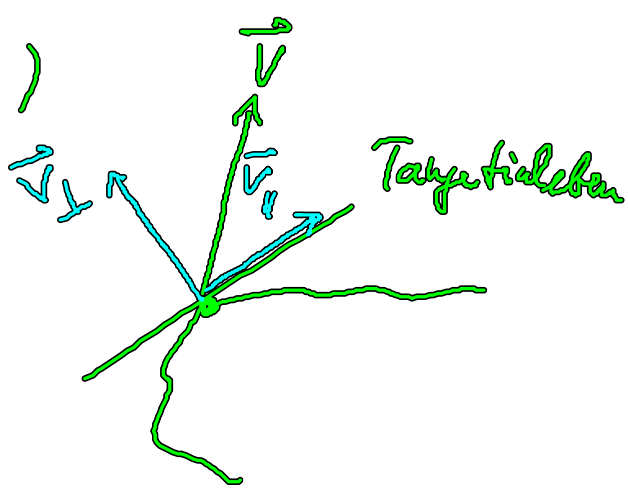


Welche Randbedingungen können wir verwenden für Felder auf der Oberfläche von Metallen



Helmholtzgleichung in Vakuum + Randbedingungen





Oberflächenladungen und Ströme stellen sich, daß beim idealen Leiter das Feld außerhalb $\neq 0$

sein kann wenn Feld innen $= 0$ ist.

a) Normalkomponente von $\vec{D}$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma(\vec{r})$$

Oberflächenladung

wenn im Leiter $D_2 \sim E_2$ $\rightarrow$ im Leiter $E_2 = 0 \rightarrow D_2 = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma$$

Die Oberflächenladungen des Metalls erzeugen außen eine Normalkomponente des D-Felds: $\underbrace{D_\perp, D_n, \vec{n} \cdot \vec{D}}_{\neq 0}$

b) $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}$

Tangentialkomponente von H

Linienstromdichte

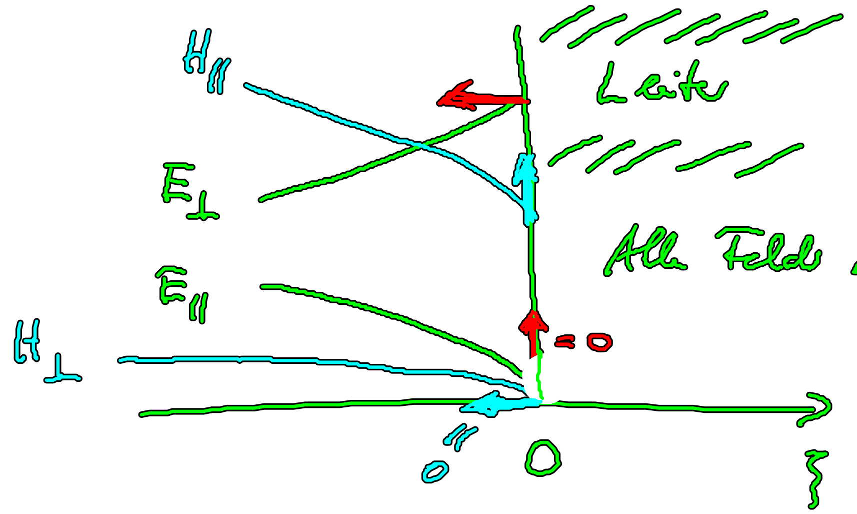
weil $\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = -\mu_r \mu_0 \partial_t H_2 \rightarrow H_2 = 0$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{K}$$

Die Linienstromdichte auf der Oberfläche des Metalls erzeugt die Tangentialkomponenten des H-Felds.

c) $\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0$

d) $\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0$ über Materialgleichg. E/D folgern



2. Felder an der Oberfläche realer Leiter

(Abriß)

Die Leitfähigkeit $\sigma_L(\omega)$ ist im einfachsten Modell die Drudeformel:

$$\sigma_L(\omega) = \frac{\omega_{pl}^2 \, \varepsilon_0}{-i\omega + \gamma}$$ siehe VL Materialmodelle

$j_L(\omega) = \sigma_L(\omega) \, E_L(\omega)$, im Zeitraum Faltg.

$$j_L(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, \sigma_L(t-t') \, E(t')$$

ein realer Leiter hat Gedächtnis

Strom (t) hängt von allen $E(t'<t)$ ab,

reagiert nicht ∞ schnell.

Effekte die man aus einer solchen Theorie bekommt, werden mit Fresnelformeln beschrieben,

einfachster Effekt: Skineffekt mit Eindringtiefe

$$\delta = \sqrt{2/(\mu_r \mu_0 \omega \sigma_L(\omega))}$$

z.B. $$H_{\parallel} = H_{\parallel}(\zeta<0)\, e^{-\frac{\zeta}{\delta} - i\frac{\zeta}{\delta}}$$