

# IX Relativistische Formulierung der Maxwellgleichungen

Aufteilung des elektromagnetischen Felds in  
elektrisches und magnetisches Feld hängt vom  
Bewegungszustand des Beobachters ab -

Beispiel: bewegte Punktladung

a) Beobachter auf Punktladung (mitbewegt)  
sieht keinen Strom  $\rightarrow$  kein  $B$

b) Beobachter außerhalb (nicht mitbewegt)  
sieht einen Strom  $\rightarrow B \neq 0$

Wir suchen in diesem Abschnitt eine kovariante

Formulierung (unabhängig vom Bewegungszustand)

und die Mgl. die Felder einfach zwischen verschiedenen

Koordinatensystemen um zu rechnen.

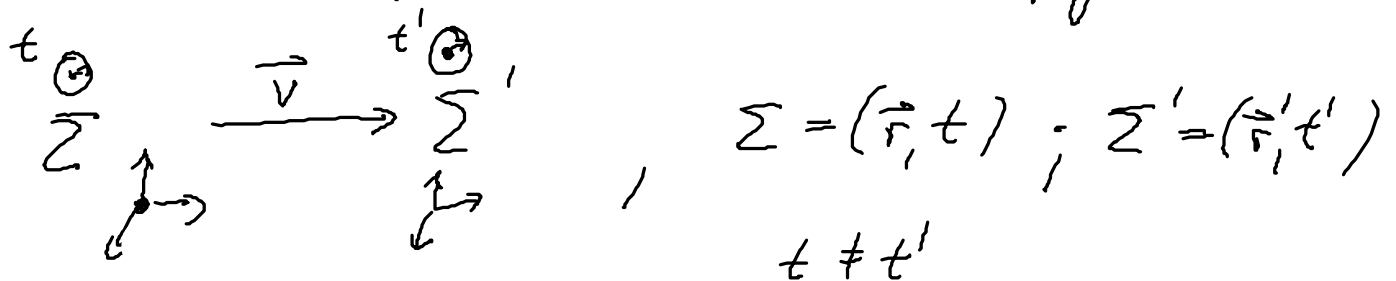
Hinweis: Maxwellgl. stimmen und müssen in

der relativistischen Physik nicht abgeändert

werden wie die Newtongleichung

# 1.) Kurzer Rückblick auf relativistische Kinematik

im Gegensatz zu Newton und auch existiert keine universelle Zeit, Zeit ist von KS abhängig:



- beim Wechsel der KS um  $\vec{v}$  der Abstand zweier Raum-Zeit-Punkte

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \text{ konstant gehalten werden}$$

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{r}'^2$$

um  $c$  konstant in  $\Sigma, \Sigma'$  zu erhalten

Analogie in Newton und auch bei

Drehg. der KS:  $\Delta \vec{r}^2 = \Delta \vec{r}'^2$

- Umrechnung zwischen beiden Systemen  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

ist durch die Lorentztransformation gegeben

- in ähnlicher Weise wird in  $\Sigma$  ein  $\vec{E}, \vec{B}$

gemessen, in  $\Sigma'$  ein  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$

- relativistische Mechanik: Viererschreibweise

Kontravariante Vektoren:  $X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$   
(Raum-Zeit-Vektoren)

günstig: beim Übergang von  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  bleibt Norm

ein Vierer vektor erhalten:

$$\underbrace{S'^2 = S^2 = c^2 t^2 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3}_{\text{Norm}^2 \text{ von } (X^\mu)}$$

- um die Norm schöner zu schreiben führt man  
den zugehörigen Kovariante Vektor ein

$$X_\mu = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -x^1, -x^2, -x^3)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S^2 &= \sum_\mu X_\mu X^\mu = X_0 X^0 + X_1 X^1 + X_2 X^2 + X_3 X^3 \\ &= ct^2 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3 \end{aligned}$$

oft wird Summe f. 2 identisch ( $\mu$ )

Ko- und kontravariante Indices  
weggelassen (Einstein Summation)

- die Komponenten der Viererpotenziale sind die Meßgrößen  
 $(\vec{r}, t)$ ,  $(\vec{r}', t')$  und diese werden mit Hilfe  
der Lorentztransformation umgerechnet (LT)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Omega}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\Omega}}$  ist die Matrix der LT

Spezialfall f. Bewegg. in x-Richtung:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \gamma &= (1-\beta^2)^{-1/2} \\ \beta &= \frac{v_x}{c} \end{aligned}$$

(kann aus  $\Delta s^2 = \text{invariant}$  bzw.  $c = \text{konstant}$ )

in Komponenten:

$$ct' = \gamma (ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma (-v_x t + x)$$

Koordinatenschreibweise:  $x'^{\mu} = \Omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$

Umkehrgleichung:  $x'_{\mu} = \omega_{\mu}^{\nu} x_{\nu}$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$x, x' \rightarrow -x, -x'$$

Bemerkung:  $\Omega_{\nu}^{\mu} \omega_{\mu}^{\lambda} = \delta_{\nu}^{\lambda}$

Beweis über Vorzeichen und Majorante:

$$\delta_{11} = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = 1$$

2.) Transformationsobjekte

a) es gilt f. Orts-Zeit Vektor:  $x'^{\mu} = \Omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$

Verallgemeinerung des Begriffs Vierervektor:

ein Vektor  $A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$  nennt man

Vierervektor, wenn er sich beim Wechsel des KS

wie  $x^{\nu}$  transformiert:  $A'^{\mu} = \Omega_{\nu}^{\mu} A^{\nu}$

wird später f. Vierpotenzial, Stromdichte etc. gebraucht

b) Lorentz Skalare sind Größen die invariant bleiben  
beim Wechsel zwischen den KS

- explizit ist  $h^{\mu\nu}$  als Lorentz Skalar gefunden worden

- Norm von Vierervektoren:

$$A^{\mu} A_{\mu} \stackrel{!}{=} A'^{\mu} A'_{\mu} \text{ ist zu zeigen}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A'^{\mu} A'_{\mu}}} &= \Omega_{\nu}^{\mu} A^{\nu} \omega_{\mu}^{\alpha} A_{\alpha} = \underline{\underline{\Omega_{\nu}^{\mu} \omega_{\mu}^{\alpha}}} A^{\nu} A_{\alpha} \\ &= \underline{\underline{\delta_{\nu}^{\alpha}}} A^{\nu} A_{\alpha} = A^{\nu} A_{\nu} = \underline{\underline{A^{\mu} A_{\mu}}} \end{aligned}$$

c) Matrix  $F^{\mu\nu}$  heißt kontravarianter Tensor,  
wenn sie sich wie  $x^{\mu} x^{\nu}$  transformiert

$$F'^{\mu\nu} = \Omega_{\alpha}^{\mu} \Omega_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta}$$

$$\left( x'^{\alpha} x'^{\beta} = \Omega_{\alpha}^{\mu} \Omega_{\beta}^{\nu} x^{\alpha} x^{\beta} \right)$$

später: Tensor des elektromagnetischen Felds

### 3 Verhalten der Kontinuitätsgleichung

Ladung  $Q$  ist ein Lorentzskalar (experimentell gefunden)  
(Masse nicht)

Daher muß die zeitliche Änderung der Ladung mit Stromfluß verbunden sein  $\rightarrow$  in jedem KS gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_t' \rho' + \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}' = 0$$

Darstellung in Vier Schreibweise:

$$\frac{\partial c\rho}{\partial \underbrace{(ct)}_{x_0}} + \sum_i \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \partial_{\mu} j^{\mu}$$

mit der Definition:  $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$

$$j^\mu = (c\rho, j^x, j^y, j^z)$$

ist formal die Vierer Schreibweise, aber sind

$$\partial_\mu = \left( \partial_{ct}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \text{ und } j^\mu$$

und Viervektore?

1)  $\partial_\mu$  ist ein Viervektor:

$$\underline{\underline{\partial_\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \Omega_\alpha^\nu x^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Kettenregel

$$= \sum_\nu \delta_\mu^\alpha \Omega_\alpha^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \underline{\underline{\Omega_\mu^\nu \partial_\nu}}$$

→  $\partial_\mu$  ist Viervektor weil er sich entsprechend transformiert

2)  $j^\mu$  ist ein Viervektor:

Man zeigt das indirekt —

nur wenn  $j^\mu$  4er Vektor, denn ist die Kontinuitätsgl



invariant :

wenn das gilt, so soll?

$$\partial_{\mu'} f'^{\mu}(x') = \partial_{\mu'} \left( \Omega_{\nu}^{\mu} f^{\nu}(x) \right) \stackrel{!}{=} \partial_{\mu} f^{\mu}(x)$$

$$= \Omega_{\nu}^{\mu} \sum_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} f^{\nu}(x) = \underbrace{\Omega_{\nu}^{\mu} \Omega_{\mu}^{\alpha}}_{\delta_{\nu\alpha}} \partial_{\alpha} f^{\nu}(x)$$

$$= \partial_{\nu} f^{\nu} = \partial_{\mu} f^{\mu}$$

→  $f^{\mu}$  ist ein Vierervektor

Bisherige Analogie Mechanik / Elektrodynamik:

Mechanik

ED

$$x^{\mu} = (ct, \vec{r})$$

$$f^{\mu} = (c\rho, \vec{j})$$

$$x' = (x - v_x t) \gamma$$

$$j'_x = (j_x - v_x \rho) \gamma$$

$$ct' = (ct - \frac{v_x}{c} x) \gamma$$

$$c\rho' = (c\rho - \frac{v}{c} j_x) \gamma$$

Strom und Ladungsdichte mischen ihren Charakter beim

Übergang zwischen verschied. KS, sie sind keine

Invarianten, Analogie,  $t \leftrightarrow t'$ ,  $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$ .

Felder sind Meßgrößen und stehen in Viererformulierung.

f. Potential + Felder an:

#### 4. Viererpotential

Potentialgleichung in Lorentzbedingung:

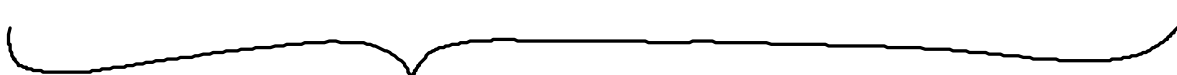
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Zusammenfassung:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i = \mu_0 j^i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

x, y, z-Komponente



$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha$$

$$A^\alpha = \left( \frac{\phi}{c}, A^x, A^y, A^z \right), \quad j^\alpha = (c\rho, j^x, j^y, j^z)$$

Das gefundene  $A^\alpha$  ist auch ein Vierervektor,  
analog  $j^\alpha$  über Lorentztransformation zeigen

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad \text{die in allen KS gelten soll}$$

In der Gleichung  $\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha$

können wir Vierervektoren vorfinden, daher sind diese  
gleichzeitig Lorentzinvariant und können in  
jeden Inertialsystem verwendet werden.

Umrechnung zwischen den KS mittels LT.

5. Feldtensor und Maxwellgleichungen in 4er Schreibweise

---

Ausdr. f. Feldtensor:  $F^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu,$

wobei  $\partial^\mu = (\partial_{ct}, -\vec{\nabla})$

Matrixelemente ausrechnen:

$$F^{10} = -\partial^1 A^0 + \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{c} + \frac{\partial}{\partial ct} A^x$$

$$= -\frac{1}{c} \bar{E}_x, \text{ analog die auch Elemente}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

F ist antisymmetrisch  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

Der Feldstärke tensor ist Lorentz tensor:

er wird aus einem Produkt von 2 Viervektoren gebildet

$(\partial^\mu, A^\nu)$  und transformiert sich daher wie:

$$F'^{\mu\nu} = \Omega_{\alpha}^{\mu} \Omega_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta}$$

Maxwellgleichung in der Vierer-Schreibweise:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -\partial_{\mu} \partial^{\mu} A^{\nu} + \underbrace{\partial^{\nu} \partial_{\mu} A^{\mu}}_{\text{wird Null}}$$

in der Lorentzbedingung gilt  $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$  wird Null

$$\text{weiterhin: } \partial_{\mu} \partial^{\mu} A^{\nu} = \mu_0 j^{\nu}$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}$$

Maxwellgleichung in 4er-Schreibweise

in Komponenten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

es fehlen noch 2 Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

aus der Identität:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0$$

Man kann die magnetischen und elektrischen Felder zu einem Feldstärke tensor  $\underline{F}$  zusammenfassen die beide Felder bilden damit eine echte „theoretische“ Einheit. Die Tensor können zwischen den KS durch die LT umgedeutet werden.

## 6. Die Transformationsgesetze f. Felder

Analogie  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ ,  $\vec{r}, t \rightarrow \vec{r}', t'$

gült  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ ,  $\underline{F} \rightarrow \underline{F}'$  und damit

$$E, B \rightarrow E', B'$$

$$x'^{\mu} = \Omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad \text{gült: } F'^{\mu\nu}(x') = \Omega_{\rho}^{\mu} \Omega_{\sigma}^{\nu} F^{\rho\sigma}(x)$$

für  $\underline{\Omega}$  von oben ( $x$ -Richtg. mit  $v_x$  f.  $\Sigma'$ )

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma (E_y - \beta c B_z), \quad E'_z = \gamma (E_z + \beta c B_y)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma (B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma (B_z - \beta E_y/c)$$

Magnetisch Feld in  $\Sigma$  bricht in  $\Sigma'$  zum elektrisch Feld bei und umgekehrt, man sieht deutlich, dass die Unterteilg. in  $E, B$  von Bewegungszustand des Beobachters abhängt analog zur Unterteilg. von Ort, und Zeit in der relativistischen Mechanik.

Achtung! Koordinat. mit umrechnen

$$x \rightarrow x'$$