IX Relativistische Formulierung der Maxwellgleichungen

Aufteilung des elektromagnetischen Felds in elektrisches und magnetisches Feld hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab –

Beispiel: bewegte Punktladung

a) Beobachter auf Punktladung (mitbewegt)
sieht keinen Strom $\rightarrow$ kein B

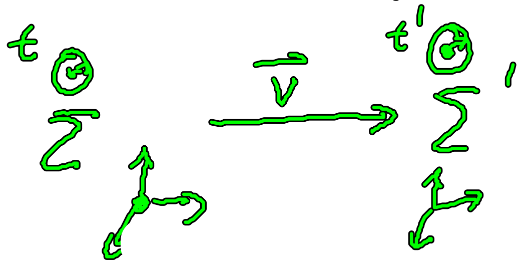
b) Beobachter außerhalb (nicht mitbewegt)
sieht einen Strom $\rightarrow B \neq 0$

Wir suchen in diesem Abschnitt eine kovariante Formulierung (unabhängig vom Bewegungszustand) und die Mgl. die Felder einfach zwischen verschiedenen Koordinatensystemen umzurechnen.

Hinweis: Maxwellgl. stimmen und müssen in der relativistischen Physik nicht abgeändert werden wie die Newtongleichung

1.) Kurzer Rückblick auf relativistische Kinematik

im Gegensatz zu Newtonmechanik existiert keine universelle Zeit, Zeit ist vom KS abhängig:



, $\Sigma = (\vec{r}, t)$; $\Sigma' = (\vec{r}', t')$

$t \neq t'$

- beim Wechsel des KS muß der Abstand zweier Raum-Zeit-Punkte

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \quad \text{konstant gehalten werden}$$

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{r}'^2$$

muß gefordert werden, um c = konstant in Σ, Σ' zu erhalten

Analogie in Newtonmechanik bei Drehg. des KS: $\Delta \vec{r}^2 = \Delta \vec{r}'^2$

- Umrechnung zwischen beiden Systemen $\Sigma \to \Sigma'$ ist durch die Lorentztransformation gegeben

- in ähnlicher Weise wird in Σ ein $\vec{E}, \vec{B}$

gemessen, in Σ' ein $\vec{E}'$, $\vec{B}'$

- relativistische Mechanik: Vierer schreibweise

kontravariante Vektoren: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

(Raum-Zeit-Vektoren)

günstig: beim Übergang von $\Sigma \to \Sigma'$ bleibt Norm

ein Vierervektors erhalten:

$$\underbrace{s'^2 = s^2}_{\text{Norm}^2 \text{ von } (x^\mu)} = c^2 t^2 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$$

- um die Norm schöner zu schreiben führt man

ein zugehörige Kovariante Vektor ein

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -x^1, -x^2, -x^3)$$

$$\to s^2 = \sum_\mu x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3$$

$$= ct^2 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$$

Oft wird Summe f. 2 identische (μ)

Ko- und kontravariante Indices weggelassen (Einstein Summenkonvention)

- die Komponenten der Vierervektoren sind die Meßgrößen $(\vec{r}, t)$, $(\vec{r}', t')$ und diese werden mit Hilfe der Lorentztransformation umgerechnet (LT)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\Omega} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\underline{\Omega}$ ist die Matrix der LT

Spezialfall f. Bewegg. in x-Richtung:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \qquad \beta = \frac{v_x}{c}$$

(kann aus Δs^2 = invariant bzw c = Konstant) in Komponenten:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(-v_x t + x)$$

Koordinatenschreibweise: $x'^{\mu} = \Omega^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$

Umkehrgleichungen: $x'_{\mu} = \omega_{\mu}{}^{\nu}\, x_{\nu}$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis:
$x, x' \to -x, -x'$

Bemerkung: $\Omega^{\mu}{}_{\nu}\, \omega_{\mu}{}^{\lambda} = \delta^{\lambda}_{\nu}$

Beweis über Vorzeile und Nachspalte:

$$\delta^{1}_{1} = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$$

2.) Transformationsobjekte

a) es gilt f. Orts-Zeit Vektor: $x'^\mu = \Omega^\mu_{\ \nu} x^\nu$

Verallgemeinerung des Begriffs Vierervektor:

ein Vektor $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ nennt man

Vierervektor, wenn er sich beim Wechsel des KS

wie x^ν transformiert: $A'^\mu = \Omega^\mu_{\ \nu} A^\nu$

wird später f. Viererpotential, Stromdichte etc. gebraucht

b) Lorentzskalare sind Größen die invariant bleiben

beim Wechsel zwischen den KS

- experimentell ist Ladung als Lorentzskalar gefunden worden
- Norm von Vierervektoren:

$$A^\mu A_\mu \overset{!}{=} A'^\mu A'_\mu \text{ ist zu zeigen}$$

$$\underline{\underline{A'^\mu A'_\mu}} = \Omega^\mu_{\ \nu} A^\nu \omega^\alpha_{\ \mu} A_\alpha = \underline{\Omega^\mu_{\ \nu} \omega^\alpha_{\ \mu}} A^\nu A_\alpha$$

$$= \underline{\delta^\alpha_\nu} A^\nu A_\alpha = A^\nu A_\nu = \underline{\underline{A^\mu A_\mu}}$$

c) Matrix $F^{\mu\nu}$ heißt kontravarianter Tensor,

wenn sie sich wie $x^\mu x^\nu$ transformiert

$$\underbrace{F'^{\mu\nu}} = \Omega^{\mu}_{\ \alpha}\, \Omega^{\nu}_{\ \beta}\, \underbrace{F^{\alpha\beta}}$$

$$\left(x'^{\alpha} x'^{\beta} = \Omega^{\mu}_{\ \alpha}\, \Omega^{\nu}_{\ \beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} \right)$$

später: Tensor des elektromagnetischen Felds

3 Verhalten der Kontinuitätsgleichung

Ladung Q ist ein Lorentzskalar (experimentell gefunden)

(Masse nicht)

Daher muß die zeitliche Änderung der Ladung mit Stromfluß verbunden sein → in jedem KS gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \partial_{t'} \rho' + \vec{\nabla}'\cdot\vec{j}' = 0$$

Darstellung in Vierschreibweise:

$$\frac{\partial c\rho}{\partial \underbrace{ct}_{x_0}} + \sum_i \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \partial_\mu j^\mu$$

mit der Definition: $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$j^\mu = (c\rho, j^x, j^y, j^z)$$

ist formal die Vierer schreibweise, aber sind

$$\partial_\mu = \left(\partial_{ct}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$ und j^μ

auch Vierervektoren ?

1) ∂_μ ist ein Vierervektor :

$$\underline{\underline{\partial_\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\underline{\underline{\partial x^\mu}}} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\underline{\Omega^\nu_\alpha x^\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Kettenregel

$$= \sum_\nu \delta^\alpha_\mu \, \Omega^\nu_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \underline{\underline{\Omega^\nu_\mu \, \partial_\nu}}$$

$\rightarrow$ ∂_μ ist Vierervektor weil er sich entsprechend transformiert

2) j^μ ist ein Vierervektor :

man zeigt das indirekt —

nur wenn j^μ 4er Vektor, dann ist die Kontinuitätsgl invariant:

$$\partial_{\mu'} j'^{\mu}(x') = \partial_{\mu'} \Big(\overbrace{\Omega^{\mu}_{\ \nu}\, j^{\nu}(x)}^{\text{wenn das gilt, so soll ?}} \Big) \stackrel{!}{=} \partial_{\mu} j^{\mu}(x)$$

$$= \Omega^{\mu}_{\ \nu} \sum_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} j^{\nu}(x) = \underbrace{\Omega^{\mu}_{\ \nu}\, \Omega^{\alpha}_{\ \mu}}_{\delta_{\nu\alpha}} \partial_{\alpha} j^{\nu}(x)$$

$$= \partial_{\nu} j^{\nu} = \partial_{\mu} j^{\mu}$$

$\rightarrow$ j^{μ} ist ein Vierervektor

bisherige Analogie Mechanik / Elektrodynamik:

<u>Mechanik</u>	<u>ED</u>
$x^{\mu} = (ct, \vec{r})$	$j^{\mu} = (c\rho, \vec{j})$
$x' = (x - v_x t)\gamma$	$j'_x = (j_x - v_x \rho)\gamma$
$ct' = (ct - \frac{v_x}{c} x)\gamma$	$c\rho' = (c\rho - \frac{v}{c} j_x)\gamma$

Strom und Ladungsdichte mischen ihren Charakter beim

Übergang zwischen verschieden KS, sie sind keine Invarianten, Analogie, $t \leftrightarrow t'$, $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}\,'$.

Felder sind Meßgrößen und sollten eine Vierer formulierung.

z. Potential + Felder an:

4. Viererpotential

Potentialgleichungen in Lorenzeichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Zusammenfassen:

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i = \mu_0 j^i \quad (i = \underbrace{1, 2, 3}_{x,y,z\text{-Komponente}})}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha$$

$$A^\alpha = \left(\frac{\Phi}{c}, A^x, A^y, A^z\right), \quad j^\alpha = \left(c\rho, j^x, j^y, j^z\right)$$

Das gefundene A^α ist auch ein Vierervektor, analog j^α über Lorenzeichung zeigen

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0,$$ die in allen KS gelten soll

In der Gleichung $\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha$

kommen nur Vierergrößen vor, daher sind diese Gleichungen Lorentzinvariant und können in jedem Inertialsystem verwendet werden.

Umrechnung zwischen den KS mittels LT.

5. Feldtensor und Maxwellgleichungen in 4er Schreibweise

Ansatz f. Feldtensor: $F^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu$, wobei $\partial^\mu = \left(\partial_{ct}, -\vec{\nabla}\right)$

Matrixelemente ausrechnen:

$$F^{10} = -\partial^1 A^0 + \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi}{c} + \frac{\partial}{\partial ct} A^x$$

$$= -\frac{1}{c} E_x \,,$$ analog die andern Elemente

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

F ist antisymmetrisch $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

Der Feldstärketensor ist Lorentztensor:
er wird aus einem Produkt von 2 Vierervektoren gebildet
(∂^μ, A^ν) und transformiert sich daher wie:

$$F'^{\mu\nu} = \Omega^{\mu}_{\alpha}\,\Omega^{\nu}_{\beta}\,F^{\alpha\beta}$$

Maxwellgleichungen in der Vierer schreibweise:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}_{\text{wird Null}}$$

in der Lorenzbeziehung gilt $\partial_\mu A^\mu = 0$

weiterhin: $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu}$$

Maxwellgleichungen in 4er Schreibweise

in Komponente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$$

es fehlen noch 2 Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$$

aus der Identität:

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0}$$

Man kann die magnetischen und elektrischen Felder zu einem Feldstärketensor $\underline{\underline{F}}$ zusammenfassen, die beiden Felder bilden damit eine echte „theoretische" Einheit. Die Tensoren können zwischen den KS durch die LT umgerechnet werden.

6. Die Transformationsgesetze f. Felder

Analogie $\quad \Sigma \to \Sigma'$, $\vec{r}, t \to \vec{r}', t'$

gilt $\quad \Sigma \to \Sigma'$, $\underline{\underline{F}} \to \underline{\underline{F}}'$ und damit

$\qquad E, B \to E', B'$

$x'^\mu = \Omega_\nu^{\ \mu} x^\nu$, gilt: $F'^{\mu\nu}(x') = \Omega_\rho^{\ \mu} \Omega_\sigma^{\ \nu} F^{\rho\sigma}(x)$

für $\underline{\Omega}$ von oben (x-Richtg. mit v_x f. Σ')

$$E_x' = E_x \,, \quad E_y' = \gamma\left(E_y - \beta c B_z\right), \quad E_z' = \gamma\left(E_z + \beta c B_y\right)$$

$$B_x' = B_x \,, \quad B_y' = \gamma\left(B_y + \beta E_z/c\right), \quad B_z' = \gamma\left(B_z - \beta E_y/c\right)$$

Magnetisches Feld in Σ trägt in Σ' zum elektrischen Feld bei und umgekehrt, man erkennt deutlich, daß die Unterteilg. in E, B vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt analog zur Unterteilung von Ort, und Zeit in der relativistischen Mechanik.

Achtg! Koordinaten mit umrechnen

$$x \to x'$$