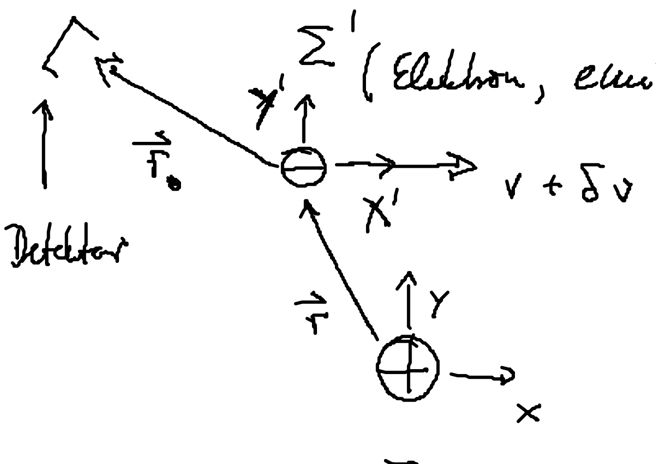
Beispiel f. Feldtransformation in relativistischer Theorie:

<u>Temperatur von astrophysikalischen und Fusionsplasmen</u>



Σ' (Elektron, emittiert Licht im Feld des Ions)

Σ (Ion im Plasma)

bewegtes Elektron hat Geschwindigkeit v aufgrund thermischer Bewegung $\frac{m}{2} v^2 \simeq \frac{3}{2} kT$ (statistische Mechanik),

δv wird durch die Bewegung im Ionfeld induziert

Frage: Kann man aus dem Spektrum der emittierten Strahlung $E_{Stra}(\vec{r}_0)$, also aus $E_{Stra}(\omega)$ die Temperatur bestimmen?

$$E_{Stra}(\omega) \sim -i\omega \underbrace{\int d^3r' \, \delta j^{\perp}(\vec{r}')}\, \frac{e^{i\omega(t - \frac{r_0}{c})}}{r_0}$$

Fernfeld — Ändrg. durch δv
erzeugt Strom δj,
dessen transversaler
Anteil das Fernfeld treibt

1 Punktladung bei $\vec{r}\,' = 0$

$$\delta j^{+} = q\, \delta v\, \delta(\vec{r}\,')$$

Ändrg. — Deltafunktion

$$= -i\omega\, q\, \delta v\, \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)}}{r_0}$$

zur Vereinfachg. Newton gesetz

$$\delta \dot{v} = \frac{q}{m} E'(\vec{r}\,' = 0)$$

$$= \frac{q^2}{m} E'(\omega, \vec{r}\,' = 0)\, \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)}}{r_0}$$

E' in Σ' kann über E in Σ aufgeschrieben werden, d.h.:

Ladungszahl

$$E'_x = E_x = \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{r^3}$$

aus Trafo aus letzter VL

Feld des Ions als Punktladung

$\Sigma: r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$E'_y = \gamma E_y = \gamma \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{r^3}$$

$$E'_z = \gamma E_z = \gamma \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

brauchen alles in den Koordinaten von Σ'

$\vec{r} \to \vec{r}\,'$

Umrechnung der Koordinaten: $v \gg \delta v$

$x = \gamma(x' - vt')$, $y = b + y'$, $z = z' = 0$

minimaler Abstand v. El-Ion

brauche: $\vec{E}'(\vec{r}\,' = 0)$

$x = -\gamma v t'$, $y = b$, $z = 0$

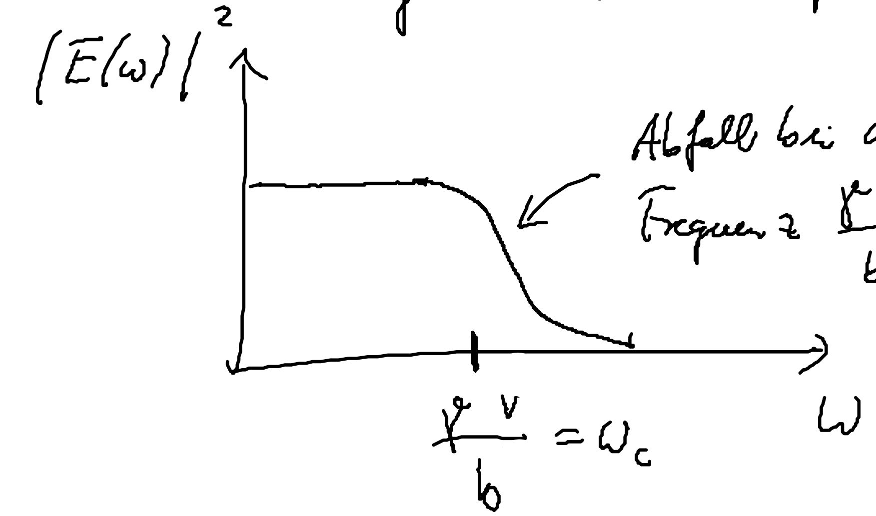
z.B.

$$E'_x = \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-\gamma v t'}{(\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}} \quad \text{usw}$$

aus $E_x'(t') \rightarrow E_x'(\omega)$

durch Fouriertrafo, führt auf Besselfunktionen

Ergebnis: gemessenes Powerspektrum



Abfall bei charakteristischer Frequenz $\frac{\gamma v}{b}$ wegen Fouriertheorem

Messg stellt die Abschneidefrequenz fest

$$\omega_c = \omega_c(T) \quad \text{über} \quad \frac{m}{2}v^2 = \frac{3}{2}kT$$

$\Uparrow$

Temperaturbestimmung

X Semiklassische Theorie der Licht-Materie WW

semiklassisch: Materie: Quantentheorie

Licht: klassisch

bestes Konzept: eigentlich 2. Quantisierung, mache etwas einfacheren Zugang, allerdings kleine didaktische Lügen

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho = q\,\psi^*(r,t)\,\psi(r,t)$$

→ Ladungsdichte in der Elektrodynamik (q – Ladg.)

$$\psi(r,t) = \sum_n c_n(t)\,\varphi_n(\vec{r})$$

ist eine Entwicklg nach einem vollständigen System $\varphi_n(\vec{r})$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{El-Feld}$$

Wechselwirkg. El – Licht

Elektron im Atom.
(Kernpotential + kinet. Energie des Elektrons)

$$\underline{H}_0\,\varphi_n = \varepsilon_n\,\varphi_n$$ (z.B. Lösung des H-Atom
n → Quantenzahlen n, l, m)

$$\rho(r,t) = q\sum_{n,n'} c_n^*(t)\,c_{n'}(t)\,\varphi_n^*(\vec{r})\,\varphi_{n'}(\vec{r})$$

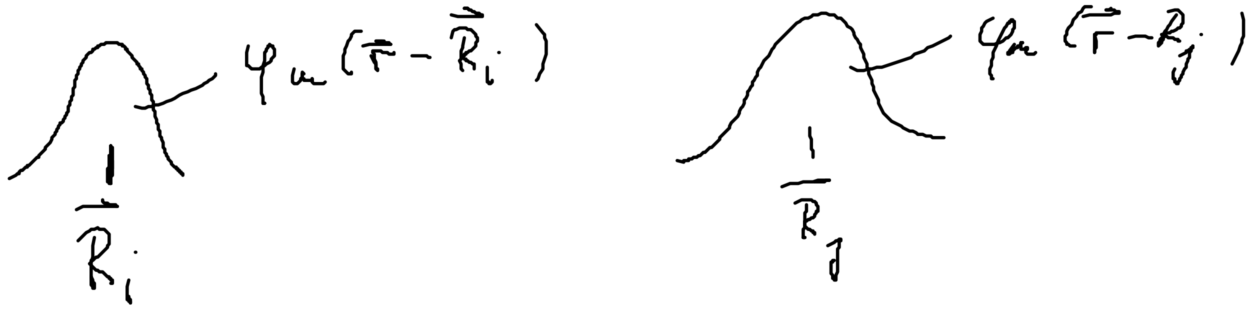
um Wellenausbreitg: Dipoldichte $\to \chi(\omega)$,

um die zu gewinnen brauchen wir makroskopische Mittlg.

$$\langle \rho(r,t) \rangle = q \sum_{mm'} c_m^*(t)\, c_{m'}(t) \int d^3r'\, g(\vec r - \vec r\,')\, \varphi_m^*(\vec r\,')\, \varphi_{m'}(\vec r\,')$$

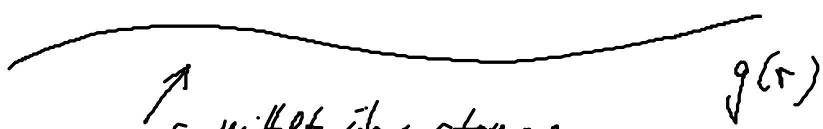
Mittlungsfunktion

beschränken uns auf gebunden Elektronen in Atomen



i-te Atom

R_i – Kern



g mittelt über atomare Details

$$\langle \rho \rangle = q \sum_{mm'} c_m^*(t)\, c_{m'}(t) \int d^3r'\, g(\vec r - \vec r\,') \sum_i \varphi_m^*(\vec r\,' - \vec R_i)\, \varphi_{m'}(\vec r - \vec R_i)$$

Summe über alle atomaren Systeme

$$\vec r\,' \to \vec r\,' + \vec R_i$$

$$= q \sum_{m,m',i} c_m^*(t)\, c_{m'}(t) \int d^3r'\, g(\vec r - \vec r\,' - \vec R_i)\, \varphi_m^*(\vec r\,')\, \varphi_{m'}(\vec r\,')$$

über die stark lokalisierte Stelle flt $\varphi_m(\vec r\,')$

ist $g(\dots \vec r\,')$ schwach veränderlich

$\longrightarrow$ Taylorreihe von g nach $\vec r\,'$

$$\approx q\sum_i \underbrace{\sum_m |c_m|^2}_{1}\, g(\vec r-\vec R_i) \xrightarrow{0.\,\text{Term}} q\sum_i g(\vec r-\vec R_i)$$

Ladungsdichte der Elektronen

Term verschwindet wenn Ionen auch gemittelt werden

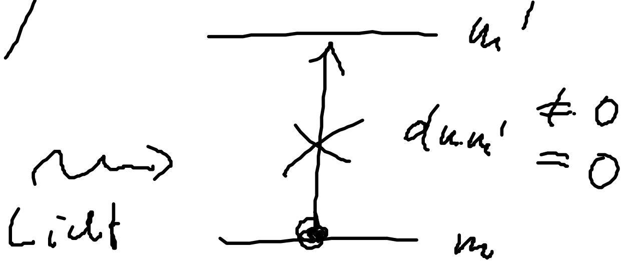
$$-\underline{\underline{q}}\sum_{mm'i} c_m^*(t)\,c_n(t)\underbrace{\int d^3r'\,\varphi_m^*(\vec r')\,\vec r'\,\varphi_{m'}(\vec r')}_{\text{Dipolmoment}}\cdot\vec\nabla_r\, g(\vec r-\vec R_i)$$

$$\xrightarrow{1.\,\text{Term}}$$

$$\langle\rho\rangle = -\vec\nabla\cdot\vec P(\vec r,t)$$

Die gemittelte Ladungsdichte wird durch die Divergenz der Dipoldichte $\vec P = \sum_{mm',i} c_m^*(t)\,c_{m'}(t)\,\vec d_{mm'}\, g(\vec r-\vec R_i)$ gegeben. Dipolmoment wird als Übergangsamplitude zwischen 2 Zuständen m, m' definiert mittels $\vec r'$

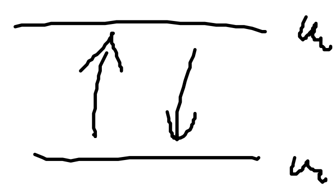
(Dipoldefinition)



$c_m^*(t)\,c_{m'}(t)$ ist noch unbekannt.

$c_m^* c_m$ $\longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit Elektron in φ_m zu finden

$c_m^*(t)\, c_{m'}(t)$ $\longrightarrow$ offenbar eine Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen m, m'



dafür brauchen wir Gleichungen.

2. Bewegungsgleichungen f. die Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden

El im externen Feld: Ladung mal Potential

$$H_{El-Feld} = q\phi = -q\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{R}_i)\,;\quad \phi \text{ gewählt: } -\vec{r}\cdot\vec{E}(R_i)$$

ist die Störung, die Überlagerungen $c_n^* c_{m'}$ der stationären Zustände erzeugt, R_i ist die schwache Ortsabhängigkeit der Maxwellgleichungen

$i\hbar\dot{\Psi} = \underline{H}\,\Psi$, um $c_n(t)$ zu berechnen:

$$\Psi = \sum_n c_n(t)\, \varphi_n(\vec r) \quad \text{einsetzen}$$

$$i\hbar \sum_n \dot c_n(t)\, \varphi_n(\vec r) = \sum_n c_n(t)\, \underline{H}\, \varphi_n(r) \quad \Big| \int d^3r\; \varphi_m^*(r)$$

$$i\hbar\, \dot c_m(t) = \sum_n c_n(t)\, H_{mn}, \qquad H_{mn} = \int d^3r\, \varphi_m^*\, \underline{H}\, \varphi_n$$

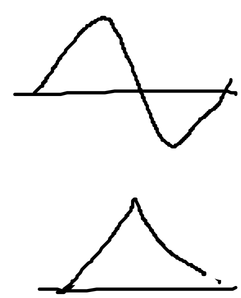
$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{El\text{-}Feld}$$

$$H_{mn} = \int d^3r\, \varphi_m^*(r)\, H_0\, \varphi_n(r) - q \int d^3r\, \varphi_m^*(r)\, \vec r\, \varphi_n(\vec r) \cdot \vec E(\vec R_i)$$

$$= \varepsilon_n \delta_{nm} - \vec d_{mn} \cdot \vec E(R_i)$$

jetzt 2 Niveausystem:

ε_2 — 2 (2p)



ε_1 — 1 (1s)

$$i\hbar\, \dot c_2 = \varepsilon_2 c_2 - \vec d_{21} \cdot \vec E\, c_1$$

$$i\hbar\, \dot c_1^* = -\varepsilon_1 c_1^* + \vec d_{21} \cdot \vec E\, c_2 \qquad (d_{21}^* = d_{12})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left(c_1^* c_2\right) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, c_1^* c_2$$

$$- \vec d_{21} \cdot \vec E \left(c_1^* c_1 - c_2^* c_2\right)$$

damit kann $\vec{P}$ berechnet werden f. Maxwellgleichungen

aus einer Quantentheorie.

$$\vec{P} = \vec{P}\left(c_m^* c_{m'},\ \vec{d}_{mm'}\right)$$

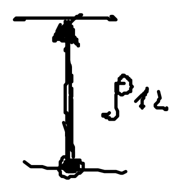
Gleichung „Blochgleichungen"

Dipolmomente sind bekannt, wenn H_0 bekannt (φ_n)

Theorie ist von gen. Größe abhängig.

$\underbrace{c_1^* c_2}_{\rho_{12}}$ $\hat{=}$ Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude

ρ_{12} Maß f. Übergänge (Überlagerungszustand)



Ist das Elektron auf dem Weg?

$\underbrace{c_i^* c_i}_{\rho_{ii}}$ $\hat{=}$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zustand φ_i

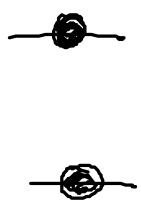
ρ_{ii} wie hoch ist Wahrscheinlichkeit daß El im Zustand φ_i ist man muß auch Gleichungen f. ρ_{22}, ρ_{11} ableiten

Interpretation:

- Übergang ρ_{12} wird getrieben durch Term $\vec{d}_{21}\cdot\vec{E}\,(\rho_{11}-\rho_{22})$

E-Feld, erlaubt, wenn $\vec{d}_{21} \neq 0$

- $(\rho_{11}-\rho_{22})$ stellt die sogenannte <u>Inversion</u> $\Delta = \rho_{11}-\rho_{22}$ dar



$\Delta < 0$ wenn Elektron eine höhere Wahrscheinlichkeit hat „oben" gefunden zu werden

dieser Term ist <u>neu</u> u. quantenmechanisch

um Resultate zu interpretieren sehen wir uns $\vec{P}$ an:

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{d}_{12}\,\underline{\underline{\rho_{12}(t)}}\,g(\vec{r}-\vec{R}_i) + cc.$$

alle Atom / Zweiniveausysteme sind gleich im Raum verteilt

$$\sum_i g(\vec{r}-\vec{R}_i) = \frac{N_0}{V}$$

$\frac{N_0}{V} = n_0$ = konstante Dichte

$$\vec P(\vec r, t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\vec d_{12}\, n_0\, \rho_{12}\right)$$

hieraus berechnen

$$\underline{\underline{\dot\rho_{12}}} = -i\,\omega_{12}\,\rho_{12} + i\,\vec d_{21}\cdot\vec E\,(\rho_{11}-\rho_{22})$$

$$\omega_{12} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\hbar}$$

Kleine didaktische Lüge: $\left.\begin{array}{l}\rho_{12}(t,\vec r)\\ \vec E(t,\vec r)\end{array}\right\}$ kommt auch bei genauer Diskussion raus.

Aufteilung in Real und Imaginärteil:

$$\dot\rho^R_{12} = -\omega_{12}\,\rho^I_{12}, \quad \dot\rho^I_{12} = \omega_{12}\,\rho^R_{12} + \vec d_{21}\cdot\vec E\,\Delta$$

$$\rightarrow \ddot\rho^R_{12} = -\omega_{12}^2\,\rho^R_{12} - \omega_{12}\,\vec d_{21}\cdot\vec E\,\Delta$$

$$\ddot{\vec P} = -\omega_{12}^2\,\vec P - 2\omega_{12}\,\vec d_{12}\,\vec d_{21}\cdot\vec E\, n_0\,\Delta$$

$$\vec P(\vec r,\omega) = \varepsilon_0\,\underline{\underline{\overleftrightarrow{\chi}(\omega)}}\,\vec E(r,\omega)$$

ohne Vektoren (denn χ ist sonst Tensor)

$$\chi(\omega) = \frac{2\omega_{12}|d_{12}|^2 n_0}{\varepsilon_0} \, \frac{\Delta}{-\omega^2+\omega_{12}^2}$$

linearer mechanischer Oszillator

Neu ist das Auftauchen der Inversion in den Gleichungen.

Die Absorption $\hat{=}$ $\mathrm{Im}(\chi)$

Das Vorzeichen der Absorption hängt von Δ ab

$\Delta \lessgtr 0$ → $\rho_{11} < \rho_{22}$ → negative Absorption

→ $\rho_{11} > \rho_{22}$ → übliche Absorption

neu negative Absorption = Verstärkung, wenn

$\rho_{22} = 1$

stimulierte Emission

$\rho_{11} = 0$

neu

$\rho_{22} = 0{,}5$ → $\Delta = 0$ → keine Wechselwirkung.

$\rho_{11} = 0{,}5$