3.) Selbstwechselwirkung atomarer Systeme – Strahlungsdämpfung und Superradianz

Ansammlung von Atomen (Dipole) betrachten $\left\{ d_{12}^{i} = \begin{array}{l}\text{Dipolmoment}\\ i\text{-te Atom}\end{array} \right\}$

abgestrahltes Feld wirkt zurück auf die Dipole selbst,

viele Dipole die miteinander wechselwirken

= „kooperative Effekte“

Rechnung im Fourierraum:

$$-i\omega\,\rho_{12}^{i}(\omega) = -i\omega_{21}\,\rho_{21}^{i}(\omega) + i\,\vec{d}_{21}^{\,i}\,\vec{E}_i(\omega)/\hbar$$

$$\omega_{21} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar}$$

, $\rho_{12}^{i}(\omega)$ – ÜWA des i-ten Atoms

$E_i(\omega)$ – Feld das auf das i-te Atom wirkt

weiterhin gilt die Wellegleichungen f. Potentiale und Feld, die das Feld $E_i(\omega)$ bestimmen.

Annahme $\Delta = 1$

Suche $E_i(\omega)$ um den Einfluß auf $\rho_{12}^i(\omega)$ bzw die Polarisation zu finden

nachlesen im Kapitel über Antenne systeme

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{A}(\vec{r},\omega) = \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}',\omega)$$

$$\phi(\vec{r},\omega) = \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\vec{r}',\omega)$$

rechnen mit räumlich gemittelte Dichte:

$$\vec{j} = \partial_t \vec{P} \quad , \quad \vec{j}(r,\omega) = -i\omega\vec{P}$$

$$\rho = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \rho_{12}^i(\omega) \int d^3r' \left(1 + \frac{c^2}{\omega^2}\vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\cdot\right) \vec{d}_{12}^i\, g(\vec{r}'-\vec{R}_i)$$

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{d}_{12}^i \rho_{12}^i(\omega)\, g(\vec{r}-\vec{R}_i)$$

(+ c.c. im Gedanken mitnehmen auf die rechte Seite der Gleichung)

Spezialfall: kleine Ausdehnung der Dipolanordnung gegen die typische Wellenlänge der Emission (ω_{21})

$$\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k|\vec{r}-\vec{r}\,'| \ll 1$$

Ausdehnung kleiner als λ

identisch

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx 1 + ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|, \quad \vec{d}_{12}^{\,i} = \vec{d}_{12}$$

reeller Beitrag (verschiebt die Resonanzfrequenz ω_{21})

Imaginärteil (bringt Strahlungsdämpfung)

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \frac{ik\omega^2\mu_0}{4\pi}\vec{d}_{12}\,d_{12}\,\rho_{12}(\omega)\sum_i\int d^3r'\, g(\vec{r}\,'-\vec{R}_i)$$

- 2. Term weglassen, bringt nur quantitative Veränderg.
- $g(\vec{r}\,'-\vec{R}_i) \approx \delta(\vec{r}\,'-\vec{R}_i)$, $\sum_i 1 = N_0$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \frac{ik\omega^2\mu_0}{4\pi}\vec{d}_{12}\,\rho_{12}(\omega)\,N_0$$

Anzahl der Dipole

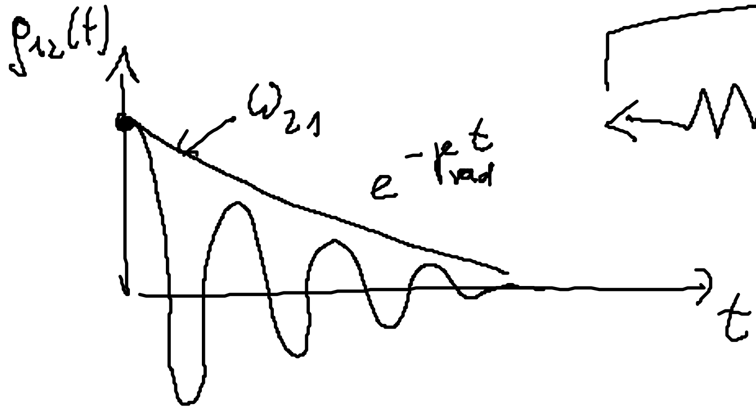
einsetzen in die $\rho_{12}(\omega)$ Gleichg:

$$-i\omega\rho_{12}(\omega) = -i\omega_{21}\rho_{12}(\omega) - \frac{\omega^3\mu_0 N_0}{4\pi c\hbar}|d_{12}|^2\rho_{12}(\omega)$$

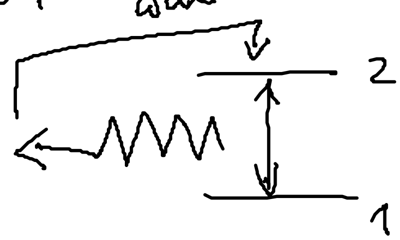
Resonanznäherung. $\omega^3 \approx \omega_{21}^3$

$$\partial_t\rho_{12}(t) = -i\omega_{21}\rho_{12}(t) - \gamma_{rad}\rho_{12}(t)$$

$$\gamma_{rad} = \frac{|d_{12}|^2\omega_{21}^3\mu_0 N_0}{4\pi c\hbar}$$



weil Licht (Energie) abgestrahlt wird, wird Dipol gedämpft

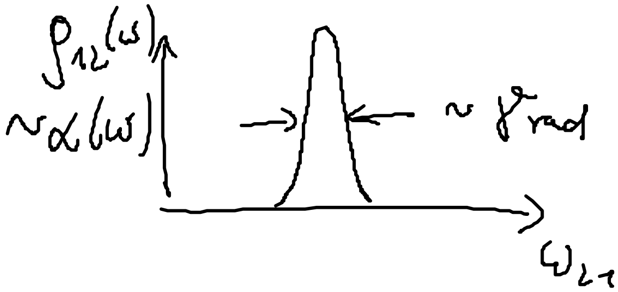


- γ_{rad} ist die radiative Dämpfung.

- $\gamma_{rad} \sim N_0$, der Zerfall ist proportional zur Zahl der Atome „Superradianz", analog geht Intensität mit N_0^2, wie bei kohärent überlagerten Oszillatoren

- 1 Dipol hat typisch Zerfallszeiten

$$\gamma^0_{rad} = \frac{1}{10^{-6} \text{ bis } 10^{-9}\ s}$$ f. Atome / Moleküle



- zum weggelassenen Linienshift: (1. Term Taylor) ω_{21} Renormierg. $\rightarrow \tilde{\omega}_{21}$, in dieser Theorie kommt ∞ für die Frequenzrenormierg raus

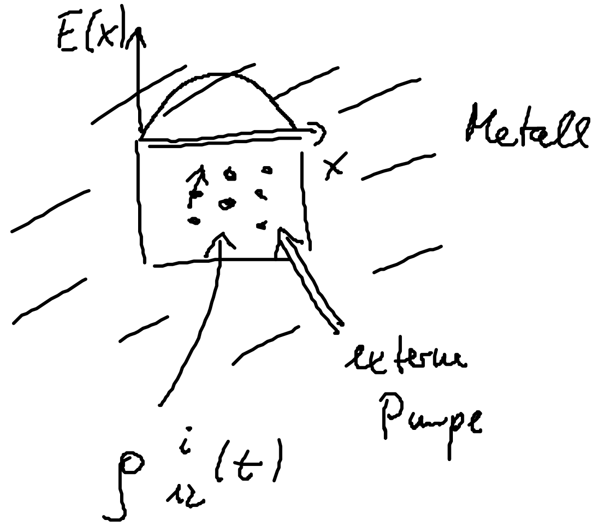
$\rightarrow$ bleibt leider auch in QED offentliches Problem mit Punktladg.?!

- Anwendg im makroskopischen:

Antennarrays $\sim N_0^2$

4. Theorie der Laseremission

Aufbau



- Ansammlg. von Zwei-Niveausystemen ρ_{12}^i
- Spiegel (1d)
- $\Delta < 0$ ist Voraus.
- Skalare Theorie

4.1) Beschreibg. d. Lichts

Resonator: $E(\vec{r},t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, u_\lambda(\vec{r})$

Entwicklg. nach den Resonatormoden $u_\lambda(\vec{r})$

aus Wellengleichg. und Randbedingungen:

$$\partial_x^2 u_\lambda(x) - k_\lambda^2 u_\lambda(x) = 0 \quad \text{im Resonator}$$

k_λ aus Randbedingg. $u_\lambda(x) \sim \sin(k_\lambda x)$

$$k_\lambda = \frac{\lambda \pi}{L}, \quad \lambda = 1, 2, 3 \ldots$$

suche: $E_\lambda(t)$, um das Feld im Laser zu berechnen

4.1 || $\Box E = \mu_0 \partial_t^2 P$ Feld-Materie Kopplg. im Resonator

4.2. || $P \sim \rho_{12} \sim E$ selbstkonsistente Formulierg.

In die Wellengleichung auf der rechten Seite einen Verlustterm einbauen $\mu_0 \partial_t j_m \sim \mu_0 \sigma \partial_t E$

ohmsches Gesetz

„Telegraphengleichung"

Herleitg. der Gleichg. für $E_\lambda(t)$:

1) einsetzen von $E(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, u_\lambda(x)$ in die Wellengleichung (Telegraphengleichung)

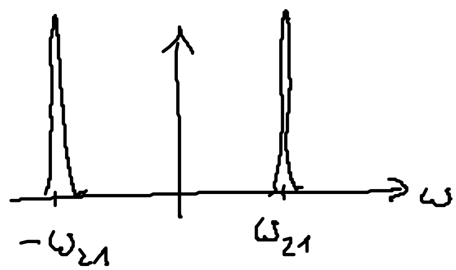
2) $\int dx\, u^*_{\lambda'}(x)$, Orthogonalität nutzen

3) und $P(x,t) = \sum_\lambda P_\lambda(t)\, u_\lambda(x)$

4) trenne von Frequenzen:

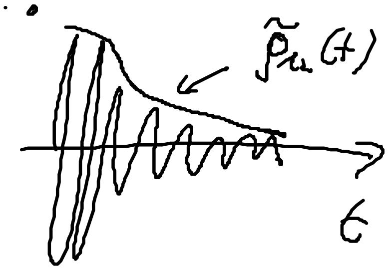
$$\rho_\lambda, E_\lambda \longrightarrow P_\lambda^\pm, E_\lambda^\pm \text{ Frequenzen}$$

$$P \sim \underbrace{\rho_{12}}_{e^{-i\omega_{21} t}} + \underbrace{\rho_{21}}_{e^{i\omega_{21} t}}$$



5) langsam Amplitudennäherg.:

$$\rho_{12} \simeq e^{-i\omega_{21} t} \tilde{\rho}_{12}(t)$$



langsam Einhüllende

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12} \ll \omega_{21} \tilde{\rho}_{12}$$

wird gemacht um 2. Zeitableitg. loszuwerden

$$\Longrightarrow \partial_t E_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) E_\lambda^+ + i \frac{\omega_\lambda}{2\varepsilon_0} \underline{\underline{P_\lambda^+}}$$

- Gleichg. für Stärke des E-Felds in Mode λ
- schwingt mit ω_λ (paßt in Resonator)
- gedämpft mit κ_λ ($\kappa_\lambda = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$), ist der

Dämpfungsterm in der Telegraphengleichung

- angetrieben wird das E_λ-Feld durch die Dipole P_λ^+.

man führt dimensionslose Lichtmoden ein b_λ

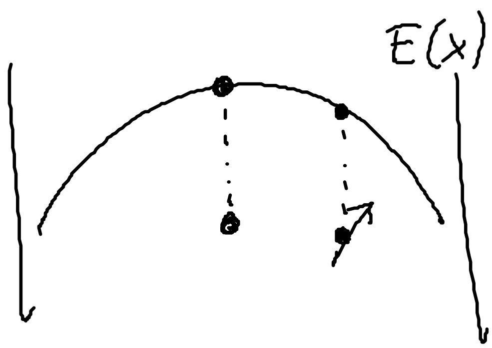
$$E_\lambda^+ = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, b_\lambda \qquad \lambda = 1, 2, 3 \dots$$

Wellenleitermoden

$$\rightarrow \partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) b_\lambda - i \underline{\sum_i g_{\lambda i}\, \rho_{12}^i}$$

$$g_{\lambda i} = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\varepsilon_0\hbar}}\, u_\lambda^*(\vec{R}_i)$$

Kopplg: an der Kopplungskonstanten sieht man, daß Dipol mit der Stärke $u_\lambda^*(R_i)$ ankoppeln



4.2 Beschreibg. der Materie

nehmen die Zweiniveaugleichung:

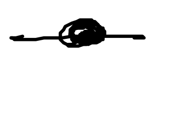
$$\partial_t \rho_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma)\rho_{12}^i + i\frac{d_{12}}{\hbar}\overset{\text{E Feld}}{\sum_\lambda} g_{\lambda i}\, b_\lambda\, \Delta^i$$

HA

$$\partial_t \Delta^i = -2i\sum_\lambda \left(g^*_{\lambda i}\,\rho^i_{21}\, b^*_\lambda - g_{\lambda i}\,\rho^i_{12}\, b_\lambda\right) \underbrace{-\left(\Delta^i - \Delta_0\right)\Gamma}_{\text{phänomenologisch Pumpen um Inversion zu erzeugen}}$$

(γ - Dämpfg. des Dipols)

$\Delta^i = \Delta_0$, wenn stationär und $g_{\lambda i} = 0$



$\Delta_0 < 0$

Δ_0 ist die Inversion (oben > unten) gegen die das System mit der Rate Γ getrieben wird, wenn $g_{\lambda i} = 0$.

Halbleiterlaser: Pumpstrom

4.3. Lasergleichungen f. 1 Mode

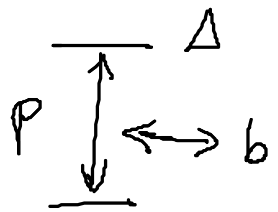
Definition $p = \sum_i \rho_{12}^i$, $\Delta = \sum_i \Delta^i$, $\Delta_0 \to N_0 \Delta_0$

1 Mode, λ-Index weglassen:

$$\partial_t p = (-i\omega_{21} - \gamma)p - igb\Delta$$

$$\partial_t \Delta = -(\Delta - \Delta_0)\Gamma - 2ig(pb^* - p^* b)$$

$$\partial_t b = (-i\omega - \kappa)b - igp$$



sind komplett verkoppelt

Idee: $\partial_t p$ stationär lösen $\partial_t p = 0$ setzen

(γ groß)

$\to$ Gleichg. für $b^* b$ ableiten: $b^* b = n$, die Photonzahl

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t n &= \underset{(1)}{-2\kappa n} - \underset{(2)}{nW\Delta}, \quad W = \frac{2g^2}{\gamma} \\ \partial_t \Delta &= \underset{(3)}{-\Gamma(\Delta - \Delta_0)} - \underset{(4)}{2nW\Delta} \end{aligned}}$$

Laser-Ratengleichungen f. 2 Niveausystem
nichtlinear Gleichg. (gekoppelte Dgl.)

① Resonatorverluste, dämpfen das E-Feld

② stimulierte Emission $\Delta = \text{fest} < 0$

$$n \sim n_0 \, e^{-w \Delta t} \rightarrow \text{exponentielles Anwachsen Photonen}$$

③ Pumpmechanismus

④ Abbau der Inversion durch Licht, $n = \text{fest}$

$$\Delta \sim \Delta_0 \, e^{-wnt}$$

Bedingung der stationären Lösung:

$\dot{\Delta} = 0 = \dot{n}$, Gleichungssystem:

Δ-Gleichg: $$\Delta = \frac{\Gamma \Delta_0}{\Gamma + 2nw}$$

n-Gleichg: $$n(2\kappa + w\Delta) = 0$$

$$n\left(2\kappa + \frac{w \Gamma \Delta_0}{\Gamma + 2nw}\right) = 0$$

$$\Delta_0 < 1$$

die n Gleichg. hat 2 Lösungen:

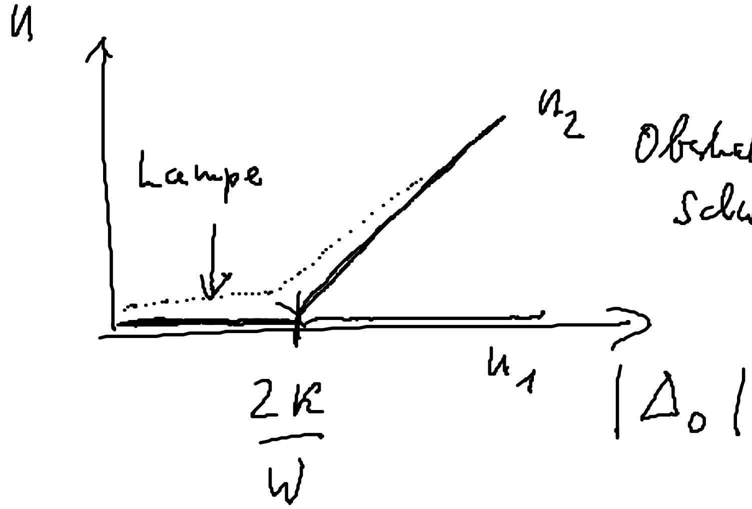
$$n = n_1 = 0 \quad , \quad \underbrace{n_2 = \left(\frac{W|\Delta_0| - 2\kappa}{4\kappa W}\right)\Gamma}$$

Photonzahl $\neq 0$

Photonzahl > 0

$\rightarrow |\Delta_0| > \frac{2\kappa}{W}$ Pumpe muß Verluste (κ) kompensieren

$|\Delta_0|$



Oberhalb der Verlustkompensation schwingt Laser an

Lampe kommt falsch raus!

man muß spontane Emission untersuchen

($\rightarrow$ nächste Woche)