XII Quantisierung des elektromagnetischen Felds

1. Hamiltonian

klassische Feldenergie:

$$H = \int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec r, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec r, t) \right)$$

Modenentwicklung:

$$\vec E(\vec r, t) = \sum_\lambda \vec u_\lambda(\vec r)\, E_\lambda^-(t) + c.c.$$

$\vec u_\lambda(r)$ sind Lösungen zur Helmholtzgleichung
im freien Raum $\left(e^{i\vec k \cdot \vec r}\, \vec e_{rk} \right)$ oder im Resonator.

eindimensionaler Resonator als einfachstes Bsp:

$$u_\lambda = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \sin\left(\frac{\lambda \pi}{L} x\right)$$

E_λ zunächst unbekannt

führe die dimensionslose elektrische Felder ein

$$E_\lambda^- = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, \underline{b_\lambda^*(t)}$$

das ist jetzt gesucht

$$E_\lambda^+ = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, b_\lambda(t)$$

$$\omega_\lambda = \frac{\lambda\pi c}{L} \qquad \lambda = 1, 2, 3 \dots$$

heuristische Quantisierung:

$$b_\lambda, b_\lambda^* \Longrightarrow b_\lambda, b_\lambda^+$$

Zahlen werden jetzt zu Operatoren und man fordert eine zugehörige Vertauschungsrelation die sinnvoll an Experimente anschließt

Analogie zu Heisenbergs vorgehen bei $\vec{r}, \vec{p}$

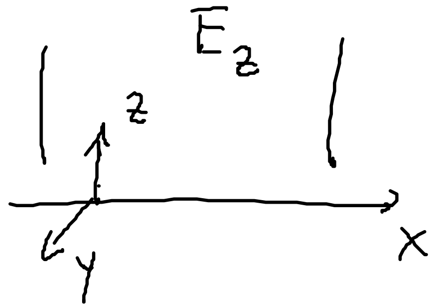
fordern: <u>Bose</u> vertauschungsrelation

$$\underbrace{[b_\lambda, b_{\lambda'}^+]_-}_{b_\lambda b_{\lambda'}^+ \,-\, b_{\lambda'}^+ b_\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$+$ gilt f. Elektronen

„Fermi vertauschungsrelation“

$H \rightarrow \underline{H}(b_\lambda, b_\lambda^+)$ ist jetzt Operator



1 Mode ohne λ Index

$\omega_\lambda = \text{fest}$

$$E_z = -\underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}}_{\text{Normierung der Mode}}\ \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}\, i\,(b-b^+)}_{\text{Feld mit dimensionslosen Operatoren, Einheit}}\ \underbrace{\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)}_{u_\lambda}$$

$$b = b_0\, e^{-i\omega t}$$

$$B_y = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}}\ (b+b^+)\frac{1}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

$$E_0$$

$$\partial_t E_z = c^2 \partial_x B_y$$

$(\partial_t E \sim \vec{\nabla} \times \vec{B}$ 1d geschrieben$)$

jetzt H in b^+, b ausdrücken:

$$H = \hbar\omega \left(b^+ b + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad [b, b^+] = 1$$

folgt aus:

$$H = \underline{\int d^3r} \; \frac{\varepsilon_0}{2} \; \underline{\frac{2}{L}} \; \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \; \underline{\sin^2\left(\frac{\omega}{c} x\right)} \left(b - b^+\right)^2 (i)^2$$

$$+ \underline{\int d^3r} \; \frac{1}{2\mu_0} \; \frac{1}{c^2} \; \underline{\frac{2}{L}} \; \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \; \underline{\cos^2\left(\frac{\omega}{c} x\right)} \left(b + b^+\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \left(- (b - b^+)(b - b^+) + (b + b^+)(b + b^+) \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4} \left(b^+ b + b b^+ + b b^+ + b^+ b \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4} \left(b^+ b + 1 + b^+ b + 1 + b^+ b + b^+ b \right)$$

$$= \hbar\omega\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right) \quad \checkmark$$

Der Hamilton- ein 1 modige Lichtfelds $\hat{=}$ ein harmonische Oszillator modell

(viele Moden: $\sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(b_\lambda^+ b_\lambda + \frac{1}{2}\right)$)

<u>Sprechweise:</u> b^+, b Erzeuger / Vernichter von Oszillatorquanten

b^+ erzeugt ein Photon, b vernichtet ein Photon

$b^+ b$ ist die Anzahl der Quante in Mode

Quant $\hat{=}$ Photonen

2. Quantenzustände des Strahlungsfelds im frei Raum

2.1. Schrödingergleichg.

Stationär: $\hbar\omega\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right)\phi_n = E_n \phi_n$

ϕ_n ist Wellenfkt. (<u>Eigenfunktion</u>) d. em. Felds

Wissen vom harmonischen Oszillator:

a) Energie: $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

n - Zahl der Quanten (Photonen) im System

b) Eigenfunktion: $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(b^+\right)^n \phi_0$

Vakuumzustand mit n=0 Photon

beschreibt einen Zustand mit n Photonen.

c) $b^+ b = \underline{n}$ Photonenzahloperator

$\underline{n}\,\phi_n = n\,\phi_n$

d) allgemeine Lösung:

$$\phi(t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i\frac{\varepsilon_n}{\hbar}t},$$ dargestellt aus

Überlagerung der Eigenfunktionen ϕ_n.

2.2. Charakterisierung engl. Zustände

Erwartungswert und Schwankg. von

$\underline{E}$ - Feld und Photonenzahl $\underline{n}$ für festgelegten

Zustand ϕ:

$$\langle \underline{E} \rangle = (\phi, \underline{E}\,\phi)$$

$$\langle \Delta \underline{E}^2 \rangle = \langle \underline{E}^2 \rangle - \langle \underline{E} \rangle^2$$

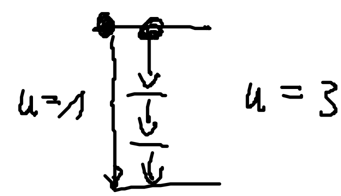
analog für $\underline{n}$

beschreibt Meßergebnisse, abhängig von Zustand $\phi(t)$

2.3. Photonzahlzustand ϕ_n

ϕ_n, $\underline{H}\,\phi_n = \varepsilon_n \phi_n$, ist Zustand mit n Photonen

entsteht z.B. bei spontaner Emission



$\langle \underline{n} \rangle$, $\langle \underline{E} \rangle$, $\langle \Delta \underline{n}^2 \rangle$, $\langle \Delta \underline{E}^2 \rangle$

sind Größen im statistischen Sinn der QM:

① $$\langle \underline{n} \rangle = (\phi_n, \underline{n}\,\phi_n) = n\,(\phi_n, \phi_n) = n$$

$$\langle \Delta \underline{n}^2 \rangle = \underbrace{(\phi_n, \underline{n}^2 \phi_n)}_{n^2} - n^2 = 0$$

In Photonzahlzustand ist die Photonzahl scharf vorgegeben

(2) $$\langle \underline{E} \rangle = \left(\phi_n, i(b^+ - b) E_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx \, \phi_n\right)$$

$$\sim \left(\phi_n, (b^+ - b)\phi_n\right) = 0$$

mit $$\left(\phi_n, b\,\phi_n\right) = \left(\phi_n, \phi_{n-1}\right)\sqrt{n} = 0$$

$$\langle \underline{E}^2 \rangle \sim -\left(\phi_n, (b^+ - b)^2 \phi_n\right)$$

Intensität $$= -\left(\phi_n, (\cancel{b^+ b^+} - b^+ b - b b^+ \cancel{+ bb})\phi_n\right)$$ $\to 0$

$$= -\left(\phi_n, (-b^+ b - b^+ b - 1)\phi_n\right) =$$

$$= (2n + 1) \underbrace{\left(\phi_n, \phi_n\right)}_{1}$$

Rauschen des Vakuums

Bei ein Photonzahlzustand verschwindet das Feld im Mittel, die Intensität hat ein Anteil der proportional zur Photonzahl ist und ein Vakuumanteil

Interpretation:

zufällig verteilte Phasen

klassisches Analogon: $E = \sum_i E_i e^{i\varphi_i}$

$$\langle E \rangle = \sum_i E_i \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_i \, e^{i\varphi_i}}_{\text{Phasenmittel}} = \sum_i E_i \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i} e^{i\varphi_i} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\langle E^* E \rangle = \Big\langle \sum_{i \neq j} E_i E_j e^{i\varphi_i} e^{-i\varphi_j} \Big\rangle + \Big\langle \sum_i |E_i|^2 \Big\rangle =$$

Intensität

$$= \quad 0 \quad + \quad I$$

quantenmechanisch:

Wenn die Photonenzahl (Intensität) genau bestimmt, so ist die Phase völlig unbestimmt. Analog wie Ort und Impuls

2.4. kohärenter Zustand

$$\phi_\alpha(t) = \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \phi_n \, , \quad c_n \overset{\text{wählen}}{=} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

charakterisiert

α ist komplex

„Glauberzustand" (Nobelpreis)

- diese Zustände beschreiben Licht am Laser oberhalb der Schwelle

- warum c_n so kompliziert gewählt?

$b\,\phi_\alpha = \alpha\,\phi_\alpha$, wenn c_n wie oben,

so ist ϕ_α ein Eigenfkt. von b

(allerdings nicht hermitisch, α = komplex)

ohne Beweis, auch $b^+\phi_\alpha = \alpha^*\phi_\alpha$

$$\langle \underline{E} \rangle = (\phi_\alpha, \underline{E}\,\phi_\alpha) =$$

$$i\,E_0 \sin(kx)\left(\alpha^* e^{i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t}\right)$$

$$= E_0 |\alpha| \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

Das ist eine stehende Welle im Resonator im Sinn der klassischen Elektrodynamik.

$$\langle \underline{n} \rangle = (\phi_\alpha, b^+ b\,\phi_\alpha)$$

$$= (\phi_\alpha, \alpha^* \alpha\,\phi_\alpha)$$

$= |\alpha|^2$

Intensität $E^2 \sim n$ Photonzahl

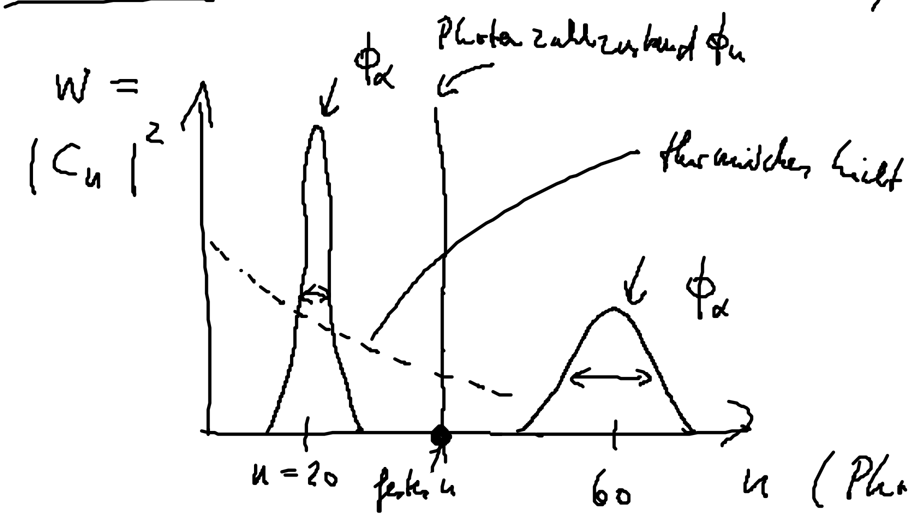
auch klassisch erwartetes Resultat.

<u>Aber Achtg:</u> auch der kohärente Zustand unterliegt diesem Quantenrauschen

$$\langle \Delta n^2 \rangle \neq 0 \neq \langle \Delta E^2 \rangle$$

3 Photonenzahlverteilg.

<u>Experiment</u> der Photonzahl mißt, wird Wahrscheinlichkeit n Photonen zu finden



<u>ϕ_n</u>

$$|C_n|^2 = 1$$

<u>ϕ_α</u>

$$|C_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}$$

$\langle n \rangle = n$ Poissonverteilg. $\frac{\ldots}{n!}$ $|\alpha|^2 = n$

klassische Physik: dafür sollte Schwankg verschwinden

relative Schwankg $= \frac{\sqrt{\Delta n^2}}{\langle n \rangle} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \to 0$

$\alpha : \uparrow$ Feld $\uparrow$ $\Longrightarrow$ relative Schwankg. $\Downarrow$

<u>thermisches Licht</u> kann nicht mehr mit „reinen Zuständen" beschrieben werden, Statistischer Operator nötig

ϕ_{th} $|C_n|^2 = \frac{1}{\langle n \rangle + 1} \left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1} \right)^n$

Potenzgesetz

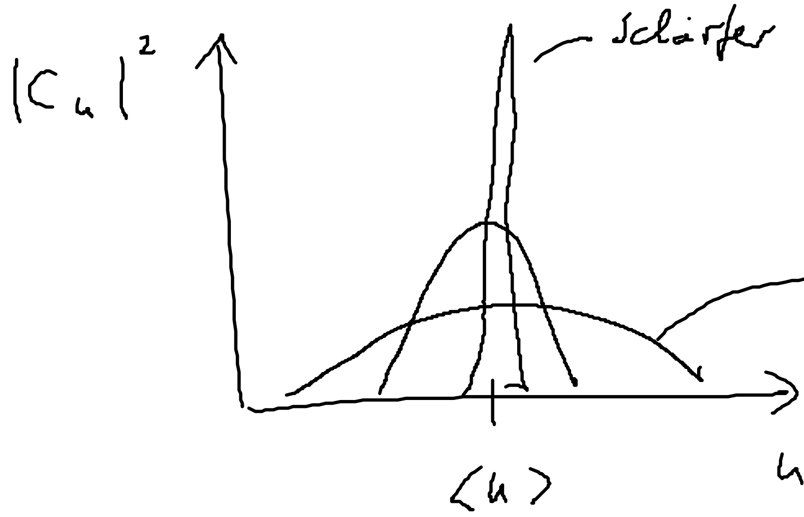
$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ kT – thermische Energie

thermisches Licht kann klassisch gut beschrieben werden

Klassifizierung der Statistik

nur quantenmechanisch beschreibbar

⇐



schärfer — Subpoisson Statistik „nichtklassisch"

Bsp: periodische EPE

antibunching

breiter aber mit selben $\langle n \rangle$

„Superpoisson Statistik"

„Klumpung"

bunching

<u>Laser</u> als Maß aller Dinge

stellt Poissonverteilung dar

zufällige Verteilung