

XII Quantisierung des elektromagnetischen Felds

1. Hamiltonian

klassische Feldenergie:

$$H = \int d^3r \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \right)$$

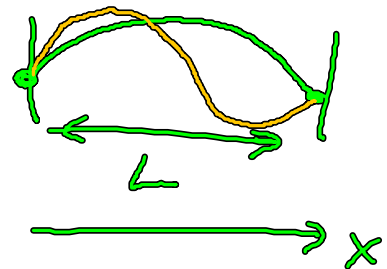
Modenterwicklung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \vec{u}_{\lambda}(\vec{r}) E_{\lambda}(t) + \text{c.c.}$$

$\vec{u}_{\lambda}(\vec{r})$ sind Lösungen der Helmholtzgleichung im freien Raum ($e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{e}_{\vec{r}k}$) oder im Resonator.

eindimensionaler Resonator als einfachstes Bsp:

$$u_{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\lambda\pi}{L} x\right)$$



E_{λ} zunächst unbekannt

führe die dimensionale elektrische Felder ein

$$\vec{E}_\lambda^- = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda}{2\epsilon_0}} \underline{b_\lambda^*(t)}$$

↖ da ist jetzt gesucht

$$\vec{E}_\lambda^+ = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda}{2\epsilon_0}} b_\lambda(t)$$

$$\omega_\lambda = \frac{\lambda \pi c}{L} \quad \lambda = 1, 2, 3 \dots$$

kanonisch Quantisierung:

$$b_\lambda, b_\lambda^* \longrightarrow b_\lambda, b_\lambda^+$$

Zahlen wird jetzt 2 Operatoren und man fordert keine zugehörige Vertauschungsrelation die sich voll an Experimente anschließt

Analysis zu Heisenberg, vorgehen bei \vec{r}, \vec{p}

fordern: Bose vertauschungsrelation

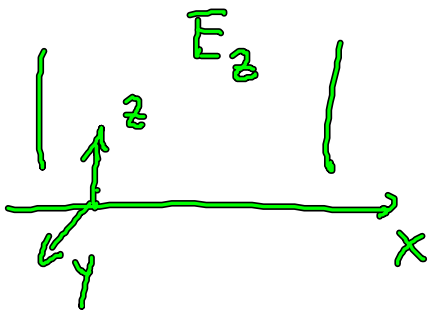
$$[b_\lambda, b_{\lambda'}^\dagger]_- = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$b_\lambda b_{\lambda'}^\dagger - b_{\lambda'}^\dagger b_\lambda$$

gilt f. Elektronen

„Fermi vertauschungsrelation“

$H \rightarrow \# (b_\lambda, b_\lambda^\dagger)$ ist jetzt Operator



1 Modus ohne 1. Index

$$E_z = - \sqrt{\frac{2}{L}} \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\epsilon_0}}}_{\text{Normierung des Modus}} \underbrace{i(b - b^\dagger)}_{\text{Feld mit dimensionaler Operatoren, Erhalt}} \underbrace{\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)}_{u_\lambda}$$

$\omega = \frac{c}{\lambda}$

$$b = b_0 e^{-i\omega t}$$

$$B_y = \sqrt{\frac{2}{L}} \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\epsilon_0}}}_{\text{Normierung des Modus}} (b + b^\dagger) \frac{1}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

E_0

$$\partial_t E_z = c^2 \partial_x B_y$$

$$(\partial_t E \sim \vec{D} \times \vec{B} \quad \text{1d geschrieben})$$

setzt H in b, b^\dagger ausdrücken:

$$H = \hbar \omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right), \quad [b, b^\dagger] = 1$$

folgt aus:

$$H = \int d^3r \quad \frac{\epsilon_0}{2} \quad \frac{2}{L} \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0} \quad \sin^2\left(\frac{\omega}{c} x\right) (b - b^\dagger)^2 (i)^2$$

$$+ \int d^3r \quad \frac{1}{2\mu_0} \quad \frac{1}{c^2} \quad \frac{2}{L} \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0} \quad \cos^2\left(\frac{\omega}{c} x\right) (b + b^\dagger)^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0} \left(- (b - b^\dagger)(b - b^\dagger) + (b + b^\dagger)(b + b^\dagger) \right)$$

$$= \frac{\hbar \omega}{4} \left(b^\dagger b + b b^\dagger + b b^\dagger b^\dagger b \right)$$

$$= \frac{\hbar \omega}{4} \left(b^\dagger b + 1 + b^\dagger b + 1 + b^\dagger b + b^\dagger b \right)$$

$$= \hbar \omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) \quad \checkmark$$

Der Hamiltonian eines 1 modigen Lichtfelds $\hat{=}$
ein harmonische Oszillator Modell

$$\left(\text{viele Moden: } \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} \left(b_{\lambda}^\dagger b_{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

Spreadweise: b^\dagger, b Erzeuger / Vernichter von
Oszillator quanta

b^\dagger erzeugt ein Photon, b vernichtet ein Photon

$b^\dagger b$ ist die Anzahl der Quanta in Mode

Quant $\hat{=}$ Photonen

2. Quantenzustände des Strahlungsfelds im freien Raum

2.1. Schrödingergleichung

$$\text{Stationär: } \hbar \omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) \phi_u = \epsilon_u \phi_u$$

ϕ_u ist Wellenfkt. (Eigenfunktion) d. em. Felds

Wise von harmonisch Oszillator:

a) Energie: $\epsilon_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ $n = 0, 1, 2, \dots$
 n -Zahl der Quanta (Photonen) im System

b) Eigenfunktion: $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n \phi_0$
↑
Vakuumzustand
mit $n=0$ Photonen

beschreibt ein Zustand mit n Photonen

c) $b^\dagger b = \underline{n}$ Photonenzahloperator

$$\underline{n} \phi_n = n \phi_n$$

d) allgemeine Lösung:

$$\phi(t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i \frac{\epsilon_n}{\hbar} t}, \text{ dargestellt aus}$$

Überlagerung der Eigenfunktionen ϕ_n .

2.2. Charakterisierung zeitl. Zustände

Erwartungswert und Schwachg. von

E-Feld und Photonenzahl n für festgelegte

Zustand ϕ :

$$\langle \underline{E} \rangle = (\phi, \underline{E} \phi)$$

$$\langle \Delta \underline{E}^2 \rangle = \langle \underline{E}^2 \rangle - \langle \underline{E} \rangle^2$$

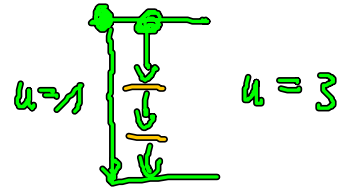
analog für \underline{u}

beschreibt Meßergebnisse, abhängig von Zustand $\phi(E)$

2.3. Photon Zahl Zustand ϕ_u

ϕ_u , $\underline{u} \phi_u = u \phi_u$, ist Zustand mit u Photonen

entsteht z.B. bei spontaner Emission



$$\langle \underline{u} \rangle, \langle \underline{E} \rangle, \langle \Delta \underline{u}^2 \rangle, \langle \Delta \underline{E}^2 \rangle$$

sind Größen im statischen Liniend. QM:

$$\textcircled{1} \langle \underline{u} \rangle = (\phi_u, \underline{u} \phi_u) = u (\phi_u, \phi_u) = u$$

$$\langle \Delta \underline{u}^2 \rangle = \underbrace{(\phi_u, \underline{u}^2 \phi_u)}_{u^2} - u^2 = 0$$

\mathbb{Z}_n Photonzahlzustand ist die Photonzahl n vorgegeben

$$\textcircled{2} \langle E \rangle = (\phi_n; i(b^\dagger - b) E_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx \phi_n)$$

$$\sim (\phi_n, (b^\dagger - b) \phi_n) \stackrel{\uparrow}{=} 0$$

$$\text{mit } (\phi_n, b \phi_n) = (\phi_n, \phi_{n-1}) \sqrt{n} = 0$$

$$\langle E^2 \rangle \sim -(\phi_n, (b^\dagger - b)^2 \phi_n)$$

$$\text{Intensität} = -(\phi_n, (\cancel{b^\dagger b^\dagger} - b^\dagger b - b b^\dagger + \cancel{b b}) \phi_n) /$$

$$= -(\phi_n, (-b^\dagger b - b^\dagger b - 1) \phi_n) =$$

$$= (2n + 1) \underbrace{(\phi_n, \phi_n)}_1$$

Rauschen

des Vakuum

Bei ein Photonzahlzustand verschwindet das Feld im Mittel, die Intensität

hat ein Anteil der proportional zur

Photonzahl ist und ein Vakuumanteil

Interpretation:

klassisches Analogon: $E = \sum_i E_i e^{i\varphi_i}$

zufällig verteilte
Photonen

$$\langle E \rangle = \sum_i E_i \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_i e^{i\varphi_i}}_0 = \sum_i E_i \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i} e^{i\varphi_i} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Phasenmittel

$$\langle E^* E \rangle = \left\langle \sum_i E_i E_j e^{i\varphi_i} e^{-i\varphi_j} \right\rangle + \left\langle \sum_i |E_i|^2 \right\rangle =$$

Interferenz $i+j$

$$= 0 + I$$

quantenmechanisch:

Wenn die Photonenzahl (Intensität)

genau bestimmt, so ist die Phase

völlig unbestimmt. Analog wie Ort und Impuls

2.4. Kohärenter Zustand

Wähle

$$\phi_\alpha(t) = \sum_k c_k e^{-i\frac{E_k}{\hbar} t} \phi_k, \quad c_k = \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

↑
Charakteristik
 α ist komplex

k "Fock-Zustand" (Nobelpreis)

- diese Zustände beschreiben Licht am Laser oberhalb der Schwelle

- warum c_L so kompliziert gewählt?

$$b \phi_\alpha = \alpha \phi_\alpha, \text{ gem } c_L \text{ wie oben,}$$

so ist ϕ_α ein Eigenfkt. von b

(allerdings nicht hermitisch, $\alpha = \text{komplex}$)

ohne Beweis, auch $b^\dagger \phi_\alpha = \alpha^* \phi_\alpha$

$$\langle E \rangle = (\phi_\alpha, E \phi_\alpha) =$$

$$i E_0 \sin(kx) (\alpha^* e^{i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t})$$

$$= E_0 |\alpha| \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

Das ist eine stehende Welle in Resonator im Sinne der klassischen Elektrodynamik.

$$\langle y \rangle = (\phi_\alpha, b^\dagger b \phi_\alpha)$$

$$= (\phi_\alpha, \alpha^* \alpha \phi_\alpha)$$

$$= |\alpha|^2$$

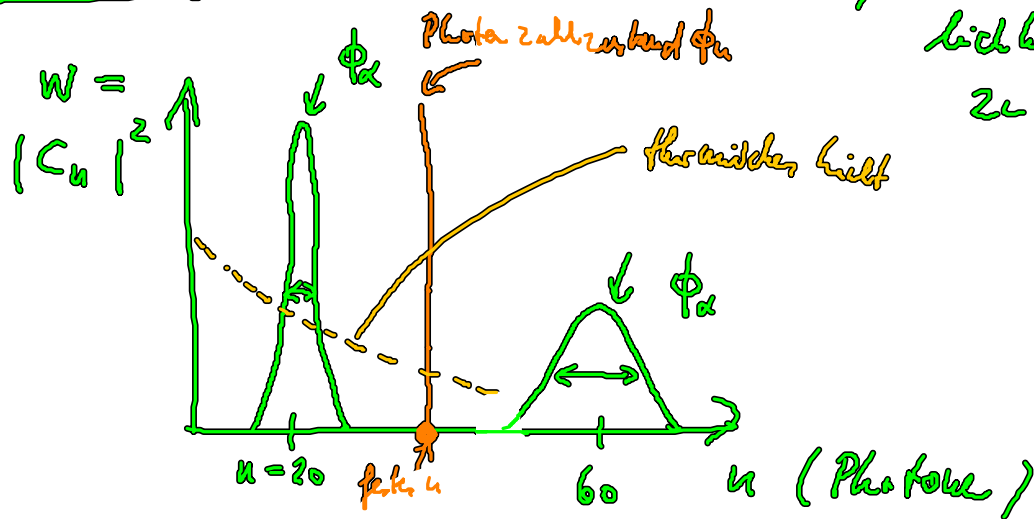
Intensität $E^2 \sim n$ Photonenzahl
 and klassisch erwartetes Resultat.

Aber Achtung: and der kohärent Zustand unterliegt
 einem Quantenrauschen

$$\langle \Delta \underline{n} \rangle \neq 0 \neq \langle \Delta \underline{E}^2 \rangle$$

3 Photonenzahlverteilung.

Experiment der Photonenzahl misst, was ist Wahrscheinlichkeit n Photonen zu finden



$$\frac{\phi_n}{|c_n|^2} = 1$$

$$\frac{\phi_n}{|c_n|^2} = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}$$

$$\langle n \rangle = n$$

Poisson verteilg. $| \alpha |^2 = n$

klassisch Physik: dafür \leftarrow Schwang. \rightarrow verschwinden \rightarrow sollk

$$\text{relativ Schwang} = \frac{\sqrt{\Delta n^2}}{\langle n \rangle} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$$

α : \uparrow Feld $\uparrow \rightarrow$ relativ. Schwang. \downarrow

thermische Licht kann nicht mehr mit „reinem Zustand“
beschrieben werden, statistischer Operator nötig

$$\phi_R \quad |c_n|^2 = \frac{1}{\langle n \rangle + 1} \binom{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1}^n$$

Potenzgesetz

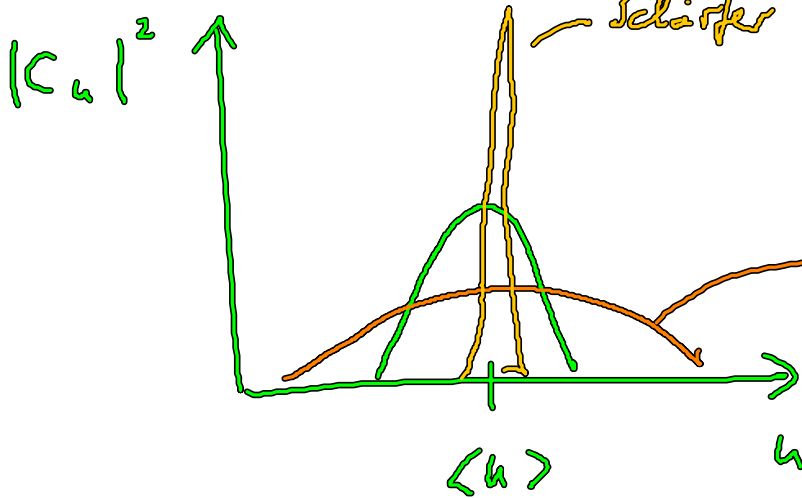
$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

kT - thermische Energie

thermisches Licht kann klassisch gut beschrieben werden

Klassifizierung der Statistik

als quantitativer Wert
beschreibbar



Subpoisson Statistik By:
"mittelmäßig" periodisch EPE
.....
Antibündung

breiter aber mit selbem $\langle h \rangle$
"Superpoisson Statistik"

.....
"Klumpung"
bündung

↑
h_{exp} er heißt alle Dinge
stellt Poisson verteilung dar

.....
Zufällige Verteilung