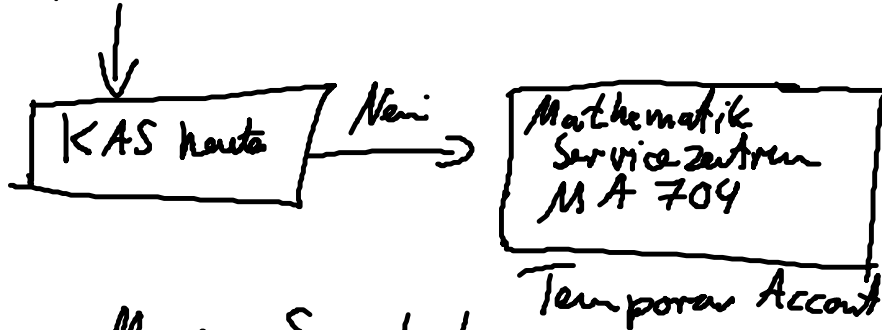


Noch kein Moses account



Moses Sprechstunde
17.4 10-12 in Raum EW ~~70~~ 710/711

Ziele

- Vermittlung von „Rüstzeug“ für die theoretische Physik — Einführung in die Sprache
- Unterschied zu anderen Math-VK

Keine strengen Beweise, sondern Beschränkung auf „Tats“

— wie man sie später braucht

Inhalte

I. Wiederholung Analysis
(einer Variablen)
z.B. Taylor-Entwicklung

II. Gewöhnliche Differentialgleichung

z.B. Newtonsche Bewegungsgleichung
in $\underline{\dot{r}}(t) = \underline{F}(r(t))$

III. Partielle Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

fixes $\frac{2m}{\hbar^2}$

IV. Koordinatentransformationen

V. Vektoranalysis

Analysis von physikalischen
Feldern

z.B. Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r}, t)$

z.B. Induktionsgesetz: $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

↑
elektr. Feld

I. Wiederholung Analysis einer Veränderlichen

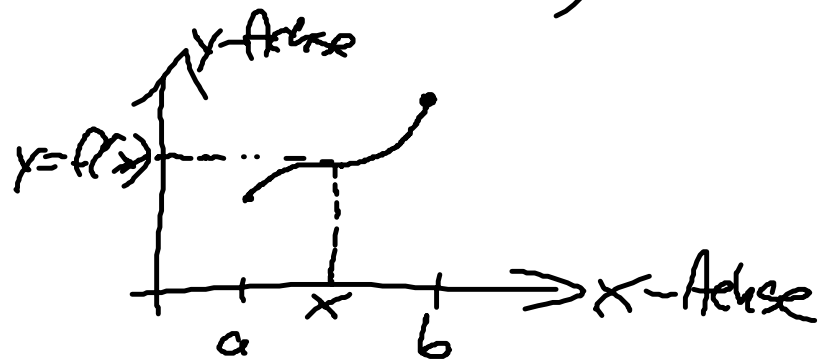
I.1. Funktion einer Variable

Sei D eine Menge und f eine Zuordnung, die jedem Element $x \in D$ eine reelle Zahl $f \in \mathbb{R}$ zuordnet

$\Rightarrow f(x)$ ist reellwertige Funktion
mit Definitionsbereich D

(z.B. $D = \mathbb{R}$, $D = [a, b]$)

Darstellung:



Begriff der Stetigkeit

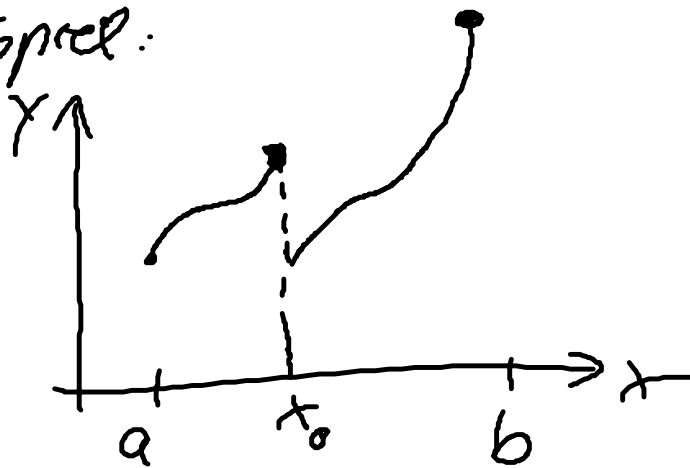
Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in D$,

falls $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$

$\nearrow h \rightarrow 0$

Grenzwert

Gegenbeispiel:



wichtig z.B. bei Wellenfunktionen in der
Quantenmechanik

Umkehrfunktion

Sei f eine injektive Funktion, d.h. $f(x) \neq f(x')$
für alle $x \neq x'$ in D
Die Umkehrfunktion heißt $f^{-1}(x)$

es gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\text{bzw. } f(f^{-1}(x)) = x$$

Beispiele

$$1) f(x) = e^x \quad (D = \mathbb{R}, \overset{\text{Bildmenge}}{\downarrow} B = f(D) = \mathbb{R}^+)$$

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad (D = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R})$$

$$\text{denn } e^{\ln x} = \ln e^x = x \frac{\ln e}{1} = x$$

$$2) f(x) = a^x \\ = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

$$f^{-1}(x) = {}_a \log x$$

Logarithmus zur Basis a

$$= \frac{\ln x}{\ln a}$$

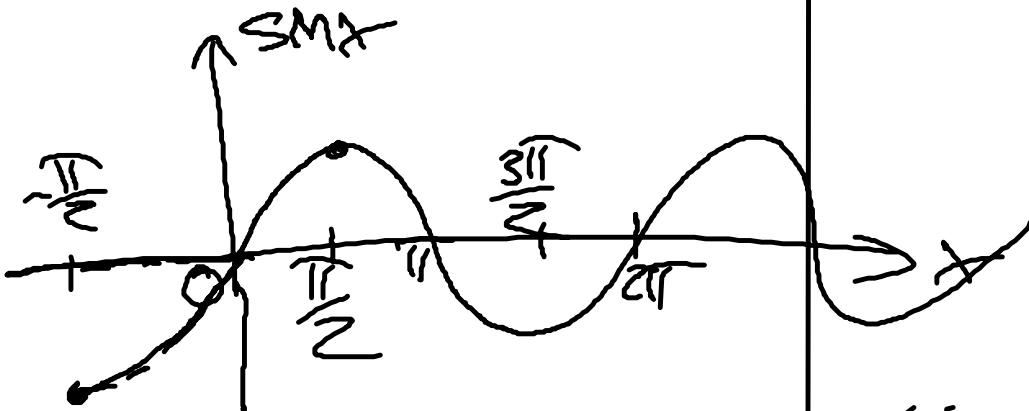
$$f^{-1}(f(x)) = a^{\log(a^x)} = \frac{\ln a^x}{\ln a}$$
$$= \frac{x \ln a}{\ln a} = x$$

o.k.

3) Arcusfunktionen

→ Umkehrfunktionen von
trigonometrischen Funktionen

\sin, \cos, \tan, \cot

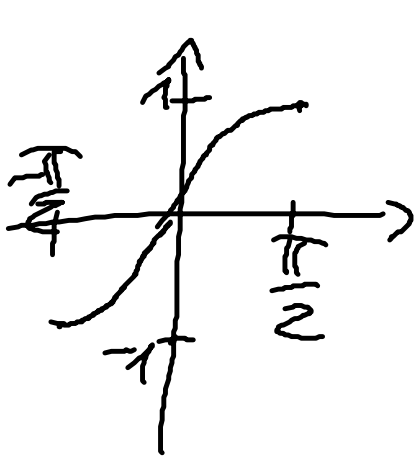


nicht injektiv!

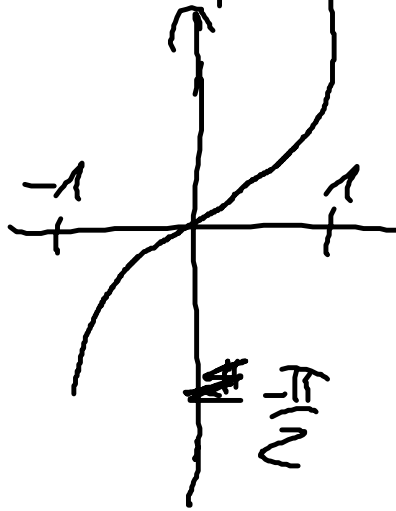
→ Umkehrung nur auf Intervallen möglich

z.B. für Sinus: man benutzt $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

→ Umkehrung heißt Arcussinus



Sinus



Arccosinus

1.2. Differentiation

z.B. Ort \rightarrow Geschwindigkeit \rightarrow Beschleunigung

Ableitung von f an der Stelle x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

z.B. $f(x) = x^2$

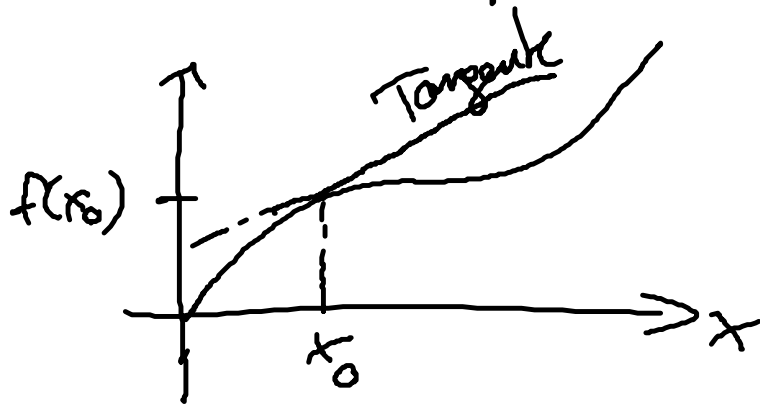
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

f heißt an der Stelle x differenzierbar,
falls der Grenzwert existiert!

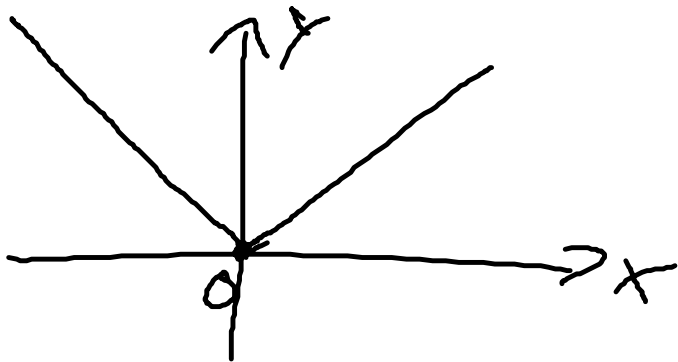
anschauliche Interpretation der Ableitung:
 $f'(x)$ entspricht Steigung der Tangente



Tangentengleichung:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel ~~in~~ für nicht differenzierbar:



$$f(x) = |x|$$

f ist stetig, aber
nicht differenzierbar
bei $x=0$!

Ableitungsregeln für
zusammengesetzte Funktionen

Es seien $f(x)$ und $g(x)$
zwei überall differenzierbare Funktionen

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

Produktregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Quotientenregel
(Voraussetzung:
 $g(x) \neq 0 \forall x \in D$)

Kettenregel:

$$g(f(x)) = (g \circ f)$$

| Verkettungssymbol

$$\begin{aligned} (g(f(x)))' &= (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

äußere Funktion ableiten, innere
schon lassen

↑
"mal"

x innere Funktion ableiten

Folgerung aus der Kettenregel

speziell für $g(x) = f^{-1}(x)$

man weiß:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1}(f(x)))' = 1$$

} aus Definition
der Umkehr-
funktion

andereits nach Kettenregel

$$(f^{-1}(f(x)))' = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$= 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

„Umkehrregel“

\Rightarrow Weg zur Berechnung von $f'(x)$ über
die Umkehrfunktion

Beispiele

benutze $a^x = e^{x \ln a}$
 $= e$

1) $\frac{d}{dx} a^x = ?$

benutze nun Kettenregel.

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})'$$

$$= e^{x \ln a}$$

$$\cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

äußere Funktion: e^y mit $y = x \ln a$

innere Funktion: $y = x \ln a$

2) Quotientenregel:

$\frac{d}{dx} \tan x = ?$

benutze: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) Ableitung des Arcustangens

↳ Umkehrfunktion des Tangens
auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$(\arctan x)' = ?$$

Ausgangspunkt: $\tan(\arctan(x)) = x$
 $(\tan(\arctan(x)))' = 1$

aus Beispiel 2):

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot \frac{d}{dx} \arctan x = 1$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \cos^2(\arctan(x))$$

benutze noch:

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \quad |$$