

Höhere Ableitungen

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f^{(2)}(x)$$

entsprechend: $f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}}{dx^n} f(x)$

falls das für jedem x geht, dann heißt $f(x)$
n-mal differenzierbar

falls die n-te Ableitung außerdem stetig ist,
dann heißt $f(x)$ n-mal stetig differenzierbar

I.3. Taylor-Entwicklung

Die Taylor-Reihe einer Funktion
 $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt a
ist definiert als

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Voraussetzung: f beliebig oft differenzierbar

Beachte: $T_f(x)$ konvergiert gegen $f(x)$, falls
das sogenannte Restglied gegen 0
konvergiert

$$\text{allgemein } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

Ausdruck auf der rechten Seite
entspricht für $n \rightarrow \infty$ der
Taylorreihe, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

Wichtige Beispiele

$$f(x) = e^x, \text{ es gilt } f^{(k)}(x) = e^x$$

Betrachte Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x=0$

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

(da Konvergenz für alle x !)

Weiters Beispiel =

$$f(x) = \sin x$$

betrachte wieder Entwicklungspunkt $a=0$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f'(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \dots$$

$$\underline{T_f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k}$$

„Geometrische“ Bedeutung der Taylorentwicklung:
(um ~~den~~ Punkt a)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots$$

Abbruch der Taylorreihe } Praxis!
nach wenigen Termen

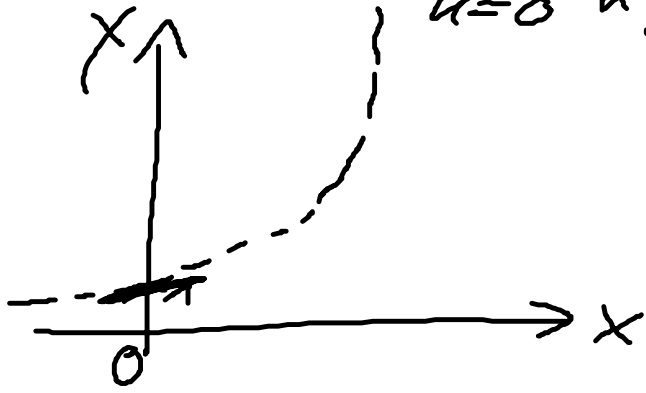
„man entwickelt bis zur n -ten Ordnung“

\Leftrightarrow Approximiere die Funktion lokal
durch ein Polynom!

z.B. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$$= 1 + x + O(x^2)$$

$$\approx 1 + x$$



Kann man funktionieren
für $x \ll 1$

noch ein Beispiel:

Kinetische Energie eines
relativistischen Teilchens

(Geschwindigkeit v ist dicht an
der Lichtgeschwindigkeit)

Gesamtenergie (Einstein)

$$E = mc^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = E - E_0$$

mit $E_0 = m_0 c^2$
Ruheenergie

$$E_{\text{kin}} = mc^2 - m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

Sei nun $\frac{v}{c} \ll 1$

\Rightarrow wir machen Taylorentwicklung des
„Wurzelterms“ um $x = \frac{v}{c} = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} (1-x^2)^{-3/2} (-2x) \right)}_{f'(x)} \Big|_{x=0} \cdot x$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} (1-x^2)^{-5/2} (-2x)^2 - \frac{1}{2} (1-x^2)^{-3/2} (-2) \right) \Big|_{x=0} x^2$$

$$+ O(x^3)$$

es gilt: $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 + O(x^4)$$

approximieren: $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$ für $x \ll 1$
Einsetzen in E_{kin}

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) - 1 \right)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

o.K!

I.4. Asymptotisches Verhalten, Grenzwerte

Häufig braucht man nur das Verhalten der Funktion bei sehr kleinen oder sehr großen Argumenten

Beispiel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim \frac{\sin x}{x} \approx$$

$$x \rightarrow 0 \quad x$$

Zwei Möglichkeiten:

a) benutze Taylorentwicklung des Sinus um $x=0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2) \right) \\ = 1$$



b) Benutze Regeln von L'Hospital

1. Regel:

Betrachte 2 Funktionen f und g
mit $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$
in einer Umgebung von x_0

$$\text{Dann folgt aus } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{auch } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

hier:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Regel von L'Hospital

$$\text{Aus } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{folgt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Asymptotisches Verhalten

$$\text{z.B. } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ Verhalten für } x \rightarrow 0?$$

umschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x^{-2}} \right)$$

$g(y) = \frac{1}{1+y}$

Mache Taylorentwicklung von $g(y)$ um $y=0$

benutze gerade die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3$$

$|y| < 1$

Einsetzen:

$$g(y) \approx 1 - y$$

$$\frac{1}{1+x^{-2}} \approx 1 - \frac{1}{x^2}$$

Einsetzen in $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

I.5. Komplex Zahlen

Komplexe Zahl.

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x: \text{„Realteil“}$$
$$y: \text{„Imaginärteil“}$$

Spezialfälle

• $y=0 \Rightarrow z$ ist eine reelle Zahl

• $x=0 \Rightarrow z$ ist rein imaginär

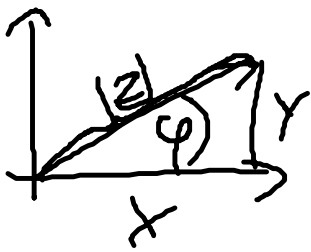
$y=1$, d.h. $z=i$ „imaginäre Einheit“

dabei $i^2 = -1$

d.h. $z=i$ ist Lösung der Gleichung $z^2 = -1$
Die andere Lösung ist $z^* = -i$

Konjugiert Komplexe Zahl.

$$z^* = x - iy$$



$$\tan \frac{y}{x} = \varphi$$

Euler'sche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\Rightarrow z = |z| e^{i\varphi} = \underbrace{|z| \cos \varphi}_x + i \underbrace{|z| \sin \varphi}_y$$

Formel von Moivre: n-te Potenz von z

$$\begin{aligned} z^n &= (x + iy)^n = (|z| e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} \\ &= |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \end{aligned}$$

sei speziell $|z| = 1$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

$$= \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

Wurzel ziehen

sei $z^n = z_0$: z heißt die n-te Wurzel aus z_0

$$\Leftrightarrow z = z_0^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel: $z^n = 1$ $i \frac{2\pi}{n} k$ mit $k=0,1,2,\dots$
 $\longrightarrow z = e$

Test: $z^n = e^{i2\pi k}$
 $= 1$ für $k=0,1,2,\dots$
o.k.

II. Gewöhnlichen Differentialgleichungen

II.1. Motivation, Einführung

i) Dynamische Grundgleichungen in der Physik haben die Form von Differentialgleichungen!

z.B. Mechanik: Bewegung eines Massenpunktes

z.B. Newtonsche BWG (Bewegungsgleichung)

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(t)$$

$a(t)$: Beschleunigung

Quantenmechanik:

Dynamik der Wellenfunktion eines Teilchens

$$\psi(x, t)$$

↑
Zeit

zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t)$$

Hamiltonoperator mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x)$
Beispiel!

• Elektrodynamik.

Grundgrößen Elektromagn. Feld

z.B. Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r}, t)$

↑
Oder
Elektr. Feld $\underline{E}(\underline{r}, t)$

⇒ Maxwellgleichungen

$$-\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{E}(\underline{r}, t)$$

↑
Rotation von \underline{E}

• Gewöhnl. Differentialgleichung:

- enthält Ableitung nach

einer Variable

• Partielle Differentialgleichungen

- enthält Ableitung nach mehreren Variablen