

II.4. Lineare homogene Systeme von DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Erinnerung: Solche Systeme können z.B. entstehen
durch Umschreiben einer DGL 2. Ordnung
(s. Kap. II.3)

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$\rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 & \text{mit } y_1 = y(x) \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) & y_2 = y'(x) \end{cases}$$

Betrachte im Folgenden Systeme der folgenden
Form:

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n$$

$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n$$

⋮

$$y_n' = a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n$$

für die n Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$
 - homogenes System
 - Die Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ konstant!

Neue Notation

Vektor $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ n -dimensionaler Vektor

Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

außerdem: Vektor $y'(x)$

umschreiben des Systems aus DGL

$$y'_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} y_\beta(x)$$

α -Komponente des Vektors $y'(x)$
 $\alpha = 1, \dots, n$

β -Komponente des Vektors $y(x)$

$(\alpha\beta)$ -Element von \underline{A}

$$\Rightarrow \boxed{y'(x) = \underline{A} y(x)}$$

entsprechend wäre $y'(x) = \underline{A} y(x) + \underline{b}(x)$

ein inhomogenes System \uparrow Vektor

Wir fokussieren nun auf den Fall $\underline{b} = 0$

Spezialfall $n=1$

$$y'(x) = a y(x) \Rightarrow y(x) = C_0 e^{ax}$$

Wie schon bekannt
allgemeine Lösung ist offensichtlich
Exponentialfunkt.

$n > 1$

entsprechender Lösungsansatz:

$$y(x) = e^{\underline{A}x} C_0$$

\uparrow Konstante Vektor

Dabei ist die Exponentialfunktion einer Matrix folgendermaßen definiert

$$e^{\underline{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{A})^k$$

Potenzreihe
 \leftarrow k -tes Matrixprodukt

$$= 1 + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} + \dots$$

und $e^{\underline{\underline{A}}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{\underline{A}})^k x^k$

Zeige nun, dass der Ansatz die DGL erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^{\underline{\underline{A}}x} \underline{\underline{C}}_0 \right) &= \left(\frac{d}{dx} e^{\underline{\underline{A}}x} \right) \underline{\underline{C}}_0 \\ &= \left(\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{\underline{A}})^k x^k \right) \underline{\underline{C}}_0 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{\underline{A}})^k k x^{k-1} \right) \underline{\underline{C}}_0 && k! = k(k-1) \dots \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{\underline{A}})^k k x^{k-1} \right) \underline{\underline{C}}_0 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{k-1} x^{k-1} \right) \underline{\underline{C}}_0 \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{A}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (\underline{\underline{A}})^{k-1} x^{k-1} \right) \underline{\underline{C}}_0$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\underline{\underline{A}})^m x^m}_{\text{mit } m=k-1}$$

mit $m=k-1$

$$= \underline{\underline{A}} \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}x}}_{\underline{\underline{y}}(\lambda)} \underline{\underline{c}}_0 = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{y}}(\lambda) \quad \text{q.e.d.}$$

Wie wertet man nun die Exponentialfunktion $e^{\underline{\underline{A}}x}$ praktisch aus?

Dazu kurze Wiederholung aus der Linearen Algebra

a) Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix. Ihre Eigenwerte und Eigenvektoren sind definiert durch die Gleichung

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}} = \lambda \underline{\underline{e}}$$

\nearrow \uparrow \nwarrow
Eigenwert Eigenvektor
 (n-dimensional)

Das ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem.

Dies hat genau dann eine Lösung, falls

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$$

(dabei benutzt, $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}} = \lambda \underline{\underline{e}}$)

$$\Rightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{1}) \underline{e} = 0$$

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

↑
Einheitsmatrix

→ „charakteristisches Polynom“

→ Polynom n-ten Grades in λ

Aus $\det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = 0$ folgen die Eigenwerte
 $\hat{=}$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Bestimmung der Eigenvektoren:

Löse für jedes λ_α ($\alpha = 1, \dots, n$)
 das lineare Gleichungssystem

$$(\underline{A} - \lambda_\alpha \underline{1}) \underline{e}_\alpha = 0$$

b) Hauptachsentransformation

Annahme: Die Eigenwerte und Eigenvektoren
 der Matrix seien bekannt \leftarrow nur für

Bilde aus Eigenvektoren die Matrix $\underline{T} = (e_1, \dots, e_n)$
d.h. Die Spalten von \underline{T} entsprechen gerade den
Eigenvektoren von \underline{A} !

Dann gilt (hier ohne Beweis)

$$\underline{A} = \underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1}$$

↖ Inverse der Matrix \underline{T}

$$\text{und } \underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n \times n - \\ \text{Matrix} \end{matrix}$$

$$\underline{T}^{-1} \underline{A} = \underbrace{\underline{T}^{-1} \underline{T}}_1 \underline{D} \underline{T}^{-1} \quad \begin{matrix} \text{Multiplikation} \\ \text{von rechts mit } \underline{T} \end{matrix}$$

$$\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{D}$$

Wozu ist ~~das~~ das gut?

Wir hatten als Lösungsansatz
in der DGL :

$$f(x) = e^{\underline{A}x} \underline{c}_0$$

$$\underline{A} = \underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} \text{ einsetzen}$$

$$\rightarrow \underline{x}(x) = e^{\underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} x} \quad \square$$

reihenweise:

$$e^{\underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1})^k x^k$$

$$(\underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1})^k =$$

$$\underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} \underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} \underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} \dots$$

$\quad \quad \quad \underline{I} \quad \quad \quad \underline{I}$

$$= \underline{T} \underline{D}^k \underline{T}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\underline{T} \underline{D} \underline{T}^{-1} x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{T} \underline{D}^k \underline{T}^{-1} x^k \\ &= \underline{T} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{D}^k x^k \right) \underline{T}^{-1} \\ &= \underline{T} e^{\underline{D} x} \underline{T}^{-1} \end{aligned}$$

$$e^{\underline{D} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{D}^k x^k$$

D ist diagonal

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Folgerung:

$$e^{\underline{\underline{I}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{I}}^{-1} x} = \underline{\underline{I}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \underline{\underline{I}}^{-1}$$

insgesamt:

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL kann wie folgt angegeben werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y}}(x) &= e^{\underline{\underline{A}} x} \underline{\underline{c}}_0 \\ &= \underline{\underline{I}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \underline{\underline{I}}^{-1} \underline{\underline{c}}_0 \end{aligned}$$

wobei I durch die Eigenvektoren von A definiert ist und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind!

geschlossener Ausdruck!

jeder Vektorwert der Lösung $y(x)$ ist eine Linearkombination von Exponentialfunktionen!

Beachte:

Alternativ hätten wir auch einfach "mit folgendem Lösungsansatz für die DGL $y'(x) = \underline{A} y$ starten können.

$$y(x) = \underline{e} e^{\lambda x}$$

wobei der Vektor \underline{e} und die Zahlen λ noch unbekannt sind

Einsetzen in die DGL

$$y'(x) = \underline{e} \lambda e^{\lambda x}$$

$$= \lambda y(x) \stackrel{!}{=} \underline{A} y(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \underline{e} e^{\lambda x} = \underline{A} \underline{e} e^{\lambda x} \quad | e^{-\lambda x}$$

$$\lambda \underline{e} = \underline{A} \underline{e}$$

Das ist wieder die "alte" Eigenwertgleichung für A!

d.h. die Zahlen λ und Vektoren \underline{e} entsprechen den Eigenwerten und Eigenvektoren der Matrix A

→ man findet n Lösungen

$$y_\alpha(x) = \underline{e}_\alpha e^{\lambda_\alpha x}$$

$$\alpha = 1, \dots, n$$

Wie verhält sich mit der Vork. gemeinsame allgemeine Lösung?

Dazu muß man wissen.

Jede Linearkombination der $y_\alpha(x)$ ist wieder Lösung der DGL!

Beispiel :

noch einmal gedämpfter harmonischer
Oszillator

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma \dot{x}(t)$$

Lineare homogene DGL 2. Ordnung

Führe ein $\dot{x}(t) = \frac{1}{m} p(t)$ ← Input

$\begin{cases} \dot{p}(t) = -kx(t) - \frac{\gamma}{m} p(t) \\ m \ddot{x}(t) \end{cases}$ aus der Bewegungsgleichung

System aus 2 linearen, homogenen DGL's 1. Ordnung!

✓

⇒ Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}$$

$$y(x) \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

Eigenwert. $\det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\delta}{m} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda \left(-\frac{\delta}{m} - \lambda\right) - (-k) \cdot \frac{1}{m}$$

$$= \lambda \left(\frac{\delta}{m} + \lambda\right) + \frac{k}{m} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

— genau wie früher,
als wir die DGL 2. Ordnung
direkt gelöst haben

betrachte wieder den Fall $\delta=0$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

und $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Eigenvektoren: } \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m i \omega \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -m i \omega \end{pmatrix}$$

→ allgemeine Lösung:

$$Y(t) = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ m i \omega \end{pmatrix} e^{i \omega t}$$

$$+ C_- \begin{pmatrix} 1 \\ -m i \omega \end{pmatrix} e^{-i \omega t} = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

C_+ , C_- Konstanten

(beachte: Ansatz erfüllt $p(t) = m \ddot{x}(t)$)