

Letztes Mal:

Systeme aus linearen DGL's 1. Ordnung
mit konstanten Koeffizienten

$$y'(x) = \underline{A} y(x)$$

allgemeine Lösung

$$y(x) = \underline{C} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \underline{C}^{-1} \underline{C}_0$$

(Spalten von \underline{C}
sind die EV von \underline{A})

alternativ:

man startet mit Ansatz $y(x) = \underline{e} e^{\lambda x} \Rightarrow \underline{A} \underline{e} = \lambda \underline{e}$

dann: Kombination der Lösung für verschiedene Eigenwerte
 λ_k ($k=1, \dots, n$)

$$\text{z.B. } y(x) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = b_1 \lambda_1 y_1(x) + b_2 \lambda_2 y_2(x) + \dots + b_n \lambda_n y_n(x)$$

$$= \underline{A} b_1 y_1(x) + \underline{A} b_2 y_2(x) + \dots$$

$$= \underline{A} y(x) \quad \checkmark$$

Ende Wiederholung

II.5. Lineare inhomogener Systeme 1. Ordnung

$$y'(x) = \underline{A} y(x) + \underline{b}(x) \quad \text{mit } \underline{A} \text{ } n \times n \text{-Matrix}$$

\underline{b} Inhomogenität

Abgehen analog wie für den Fall $n=1$ (Kap II.2)

i) Löse zunächst das homogene Problem

$$y(x) = e^{\underline{A}x} \underline{c}$$

allgemeine Lösung für $\underline{b}=0$

$$\text{erfüllt } y'(x) = \underline{A} y(x)$$

ii) Suche eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu gegebenen Anfangsbedingungen
 ~~$y(x_0) = y_0$~~ $y(x_0) = y_0$

$$\text{Ansatz: } y(x) = e^{\underline{A}x} \underline{u}(x)$$

dann wieder, Variieren der Konstanten!

→ Ergebnis: $\underline{u}(x)$ ist Stammfunktion von $e^{-\underline{A}x} \underline{b}(x)$

es folgt:

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{A}x} \left(\int_{x_0}^x dt e^{-\underline{A}t} \underline{b}(t) + \underline{y}_0 \right)$$

II.6. Lineare Systeme aus DGL's 2. Ordnung

In der Physik sind solche Systeme sehr häufig!

Sehr wichtiges Beispiel

„gekoppelte Schwingungen“

Klass. Mechanik, Festkörperphysik (Gitter-Schwingungen)
Molekülschwingungen

Zugehörige Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j$$

Masse von Teilchen i Beschleunigung von Teilchen i

wobei k_{ij} die „Kopplungsstärke“ ist

physikalisch: N gekoppelte Oszillatoren ohne Reibung (Dämpfung)

mathematisch: N -dimensionales, lineares System von DGL zweite Ordnung mit konstanten Koeffizienten

mögliche Strategien:

— Umschreiben in $2N$ DGL's
 erster Ordnung (für $x_i(t)$
 und $p_i(t) = m_i \dot{x}_i(t)$)

— Stelle direkt mit Exponentialmultiplikationsansatz
 (s. Vorgehensweise in Kap II.4. für $N=1$)

spezialisiert auf den Fall $N=2$

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_{11} x_1 + k_{12} x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_{21} x_1 + k_{22} x_2$$

\Rightarrow

$$\ddot{x}_1 = \underbrace{\frac{k_{11}}{m_1}}_{A_{11}} x_1 + \underbrace{\frac{k_{12}}{m_1}}_{A_{12}} x_2$$

$$\ddot{x}_2 = \underbrace{\frac{k_{21}}{m_2}}_{A_{21}} x_1 + \underbrace{\frac{k_{22}}{m_2}}_{A_{22}} x_2$$

definiere noch Vektor $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t)$$

Lösungsansatz:

\swarrow Schwingungsfrequenz
 $-i\omega t$

$$\underline{x}(t) = \underline{c} e$$

Beachte: Das ist genau dieselbe Strategie wie
 beim System 1. Ordnung!

Die allgemeine Lösung ist dann eine
Linearkombination der $\underline{x}(t)$ mit verschiedenen
 ω !

Einsetzen in die DGL:

$$\underline{\ddot{x}}(t) = \begin{pmatrix} C_1 (i\omega)^2 e^{-i\omega t} \\ C_2 (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \quad (\text{mit } \underline{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 (-\omega^2) e^{-i\omega t} \\ C_2 (-\omega^2) e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

$$\stackrel{!}{=} \underline{A} \underline{x}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A} \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)}$$

Das ist offensichtlich wieder ein Eigenwertproblem!
(der Eigenwert ist jetzt $\lambda = -\omega^2$)

→ Die möglichen Lösungen für $(-\omega^2)$
folgen aus dem charakteristischen
Polynom

$$\Rightarrow \det(\underline{A} + \omega^2 \underline{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

(hier: \underline{A} 2x2-Matrix: Eigenwert sehr einfach
zu bestimmen!)

$$\Rightarrow -\omega^2 = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}A_{21}}$$

\Rightarrow Es gibt insgesamt 4 Lösungen für ω !

$$\omega_1^+, \omega_1^-, \omega_2^+, \omega_2^-$$

mit $\omega_1^- = -\omega_1^+$ $\omega_2^- = -\omega_2^+$

Die Lösungen mit positivem Realteil
(ω_1^+, ω_2^+) heißen Eigenfrequenzen

einfachere Notation: ω_1, ω_2
(Normalfrequenzen)

Die zugehörigen Lösungen für \underline{z} heißen
Eigenmoden (oder auch „Normalmoden“)

$$\Rightarrow \underline{z}(t) = \underline{z}^{(1)} (\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t})$$

$$+ \underline{z}^{(2)} (\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t})$$

$\underline{z}^{(1)}$: Eigenmod zu ω_1 , $\underline{z}^{(2)}$ die Eigenmod zu ω_2 !

„triviale Fall“:

Die Massenpunkte sind entkoppelt

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^2 k_{ij} x_j$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{12} = k_{21} = 0 \\ k_{11} = -k_1, \quad k_{22} = -k_2 \end{array} \right.$$

Federkonstante für Masse 1

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

Frequenzen:

$$-\omega^2 = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow -\omega_1^2 = -\frac{k_1}{m_1} \quad \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$-\omega_2^2 = -\frac{k_2}{m_2} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

\Rightarrow Die Frequenzen ω_1, ω_2 entsprechen gerade den Schwingungsfrequenzen der einzelnen Oszillatoren!
— wie erwartet!

Die zugehörigen Eigenmoden sind

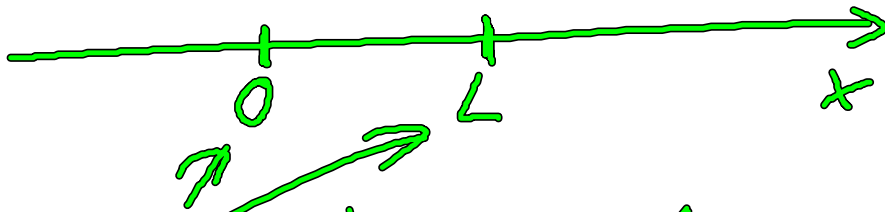
$$\underline{\underline{c}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{c}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auch hier sieht man die Entkopplung

nicht-triviale Fall

Kopplung der beiden Massen
($m_1 = m_2 = m$)

Wand | m_1 | m_2 | Wand



alle drei:
Federn haben
dieselbe Federkonstante
 k !

Ruhepositionen von Masse 1 und Masse 2

x_1, x_2 messen die Auslenkung von den Ruhelagen

Frage: Wie sieht jetzt die Kopplungsmatrix aus?
(und damit die Matrix A)

Newton'sche BWC

$$m \ddot{x}_1 = -k x_1 - k(x_1 - x_2) \\ = -2k x_1 + k x_2$$

Kopplung:
es kommt auf die
relative Auslenkung
($x_1 - x_2$) an!

d.h. z.B. $x_1=0$ und $x_2 > 0$
 \rightarrow Kraft nach rechts ok!

analog:

$$m \ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) \\ = -2kx_2 + kx_1$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}} = \underline{A} \underline{x} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

aus Eigenwertgleichung

$$-\omega^2 = -\frac{4k}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{-2k}{m} + \frac{2k}{m}\right)^2}_{0} + \left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

$$-\omega^2 = -\frac{2k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Eigenfrequenzen
des gekoppelten
Systems

Für die entsprechenden
Normalmoden ergibt sich

$$\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Mode zu } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Mode zu } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

⇒ allgemeine Lösung:

$$\underline{x}(t) = \underline{c}^{(1)} \left(\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t} \right) + \underline{c}^{(2)} \left(\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t} \right)$$

mit $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-$ aus den Anfangsbedingungen ergibt!

Anfangsbedingungen: $\underline{x}(t=0)$
 $\dot{\underline{x}}(t=0)$

physikalische Interpretation der Lösungen für dieses System aus 2 Massenzentren:

z.B. $\beta_+ = \beta_- = 0 \Rightarrow$ es kommt nur auf $\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an
„Massen schwingen miteinander mit der Frequenz ω_1 “

z.B. $\alpha_f = \alpha_L = 0 \Rightarrow$ es kommt nur auf $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ an
 \Rightarrow Massen schwingen gegeneinander mit der Frequenz ω_2

III. Partielle Differentialgleichungen und Fourierreihe

III. 1. Allgemeines

Bisher hatten wir DGL's der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

mit $y = y(x)$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ etc.}$$

„gewöhnliche Differentialgleichung“

Eine partielle DGL hat z.B. die Form

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_z, z_{xy}, z_{xz}, \dots) = 0$$

$\nearrow \nearrow$
 z Variablen

$$z = z(x, y)$$

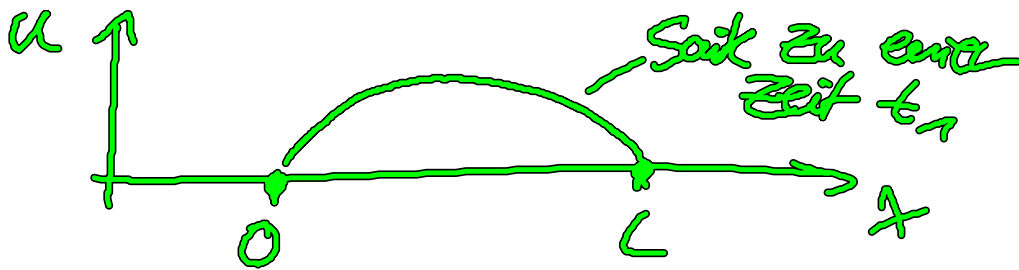
Ableitungen von z nach x und y

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

III.2. Schwingende Saite

Sei $u(x, t)$ die Auslenkung einer an beiden Seiten fixierten Saite als Funktion des Ortes x und der Zeit t



Es gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

Schwingungsgleichung

Die Gleichung heißt auch
„Wellengleichung in 1 Dimension“

(Kommt später in der Elektrodynamik bei der Diskussion der ~~Ultraschall~~ magnetischen Wellen)

Zu bestimmen:

$$u(x, t) \text{ für } t > 0$$

Vorgegeben:

Anfangsprofil für Auslenkung und
entsprechende Geschwindigkeit

$$u(x, t=0) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{t=0} = v_0(x)$$

dann noch Randbedingungen:

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0 \quad \forall t$$

Lösungsansatz:

Idee: Separationsansatz

$$u(x, t) = \gamma(x) z(t)$$

Einsetzen:

$$\text{in } \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$$\Rightarrow \gamma(x) z''(t) = c^2 \gamma''(x) z(t)$$

$$\Rightarrow \frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \frac{\gamma''(x)}{\gamma(x)}$$

Linke Seite der Gleichung hängt
nur von t ab, rechte Seite nur
von x

⇒ Beide Seiten müssen gleich eine Konstante
sein!

$$\frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \underbrace{-k^2}_{\text{Konstante}}$$

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = \underbrace{-k^2}_{\text{Konstante}}$$

⇒ Man hat also 2 Gleichungen da Form

$$\begin{array}{l} 1) z''(t) = -k^2 c^2 z(t) \\ 2) y''(x) = -k^2 y(x) \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{gewöhnliche lineare} \\ \text{DGL's 2. Ordnung} \\ \text{mit konstanter Koeffizienten!} \end{array} \right\}$$

→ allgemeine Lösungen können
sofort hingeschrieben werden!

$$y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$$

$$z(t) = \gamma_1 \cos(kcx) + \gamma_2 \sin(kcx)$$

$$u(x, t) = y(x) z(t)$$

