

Neuer Übungszeitel, Aufgabe 27b)

$$\int_{-a}^a \delta'(x) f(x) dx = -f'(0)$$

Wiederholung

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

← Konzentrationen
Diffusionsgleichung

Separationsansatz $n(x,t) = Y(x) Z(t)$

$$\Rightarrow \frac{Z'(t)}{D Z(t)} = -k^2$$

$$\frac{Y''(x)}{Y(x)} = -k^2$$

genau wie
bei Wellengleichung!

Beide Einzelgleichungen sind gewöhnliche lineare HGLS!

⇒ Lösungen sind von der Form

$$Y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx$$

$$Z(t) = e^{-Dk^2 t}$$

mögliche Anfangs- und Randbedingungen

$$n(x, t=0) = n_0 = \text{const}$$

räumliche homogene
Konzentration

$$n(x=0, t) = 0$$

$$n(x=L, t) = 0$$

L endlich

→ „Diffusion in einem,
 aber endlich langen Stab!“

$$k = \frac{m\pi}{L}$$

diskrete Werte, $m = 1, 2, 3, \dots$

Frage: Was passiert für sehr
 lange Stäbe, also $L \rightarrow \infty$?

III. 5. Fouriertransformation

Ausgangspunkt

Betrachte komplexe Fourierreihe
 einer periodischen Funktion

$f(x) = f(x + 2L)$ auf dem
 Intervall $[-L, L]$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi}{L} x}$$

setze Formel
 für c_n ein!

benutze $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-\frac{i n \pi}{L} x}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx' f(x') e^{-\frac{i n \pi}{L} x'} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L d\tilde{x} f(\tilde{x}) e^{i \frac{n\pi}{L} x} e^{i \frac{n\pi}{L} (x - \tilde{x})}$$

führe ein: $k_n = \frac{n\pi}{L}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \quad \text{mit} \quad g(k_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L d\tilde{x} f(\tilde{x}) e^{i k_n (x - \tilde{x})}$$

Abstand zwischen 2 benachbarten k -Werten:

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n$$

$$= \frac{\pi(n+1)}{L} - \frac{\pi n}{L} = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\Delta k}{\pi}$$

$$\Rightarrow g(k_n) = \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-L}^L d\tilde{x} f(\tilde{x}) e^{i k_n (x - \tilde{x})}$$

Was passiert im Limes $L \rightarrow \infty$?

\Rightarrow ersetze die Summe für $f(x)$ durch ein Integral!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \longrightarrow \frac{1}{\Delta k} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k)$$

k ist jetzt kontinuierliche Variable!

k heißt Wellenzahl

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) e^{ik(x-\tilde{x})} d\tilde{x}}_{g(k)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} f(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}}$$

definiere

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} f(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}}$$

"Fourier-
Transformierte"
von $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \quad \begin{array}{l} \text{"Fourier-} \\ \text{Rücktransformation"} \end{array}$$

man sagt auch:

"Fourier-Entwicklung der Funktion $f(x)$ "

Bemerkungen

i) Der Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ taucht bei unserer Definition unsymmetrisch auf (üblich in der Physik!)

Mathematik: häufig andere Vorfaktoren!

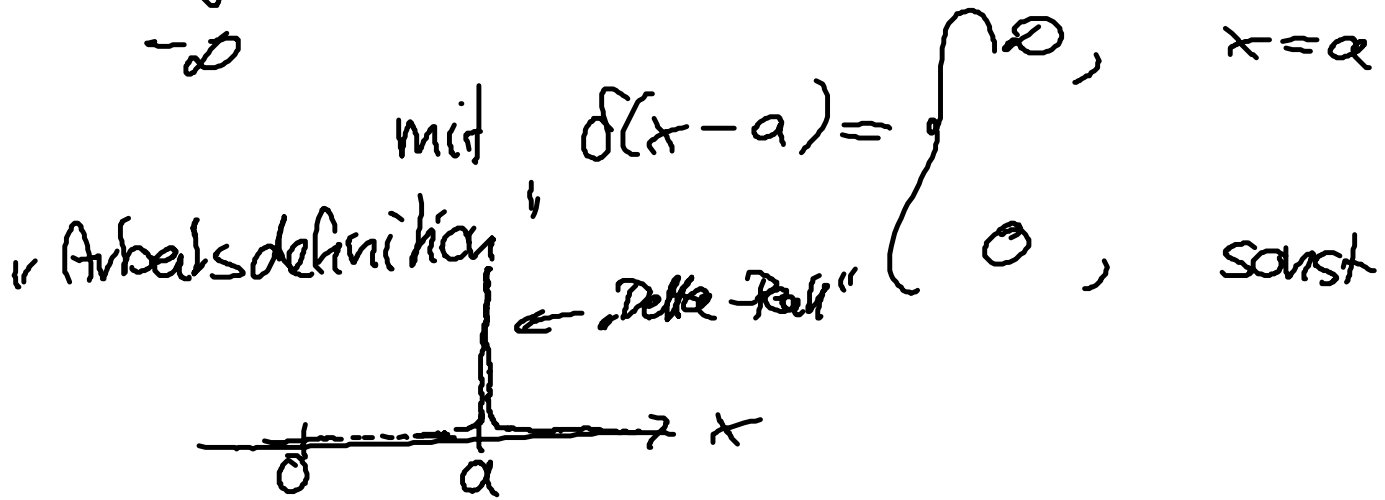
ii) Die Funktionen e^{ikx} können wieder als Basisfunktionen eines Vektorraumes aufgefasst werden!

Frage: Zugehörige Orthogonalitätsrelation?

Führe dazu die sogenannte "Delta-Funktion" ein

(Analogon des Kronecker-Deltas für kontinuierliche Funktionen!)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-a) = f(a)$$



man kann die Delta-Funktion als Grenzwert von Funktionenfolgen definieren \rightarrow Übung!

alternativ

$$\textcircled{*} \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{e^{ik(x-x')}}_{e^{ikx} \cdot e^{-ikx'}}$$

$$x=x' : e^{ik(x-x')} = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \rightarrow \infty$$

$$x \neq x' : e^{ik(x-x')} = \cos k(x-x') + i \sin k(x-x')$$

osillierend!
 \rightarrow Integral verschwindet.

⊛ stellt die gesuchte
Orthogonalitätsrelation der
Basiselemente e^{ikx} und $e^{-ik'x}$
dar!

analog: $\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x}$

Zeige nun, dass ⊛ konsistent ist mit unserer
Definition der Fouriertransformation!

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} e^{-ik\tilde{x}} f(\tilde{x})}_{\hat{f}(k)} e^{ikx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} f(\tilde{x}) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\tilde{x})}}_{\delta(x-\tilde{x})} \\
&\stackrel{!}{=} f(x)
\end{aligned}$$

Beispiele für Fourier Transformationen \rightarrow übergattet!

III. 6. Anwendung der Fouriertransformation auf Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) \quad (*)$$

transformiere (in 0^t)

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{n}(k,t) e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{n}(k,t) (-k^2) e^{ikx}$$

einsetzen in $(*)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int dk \hat{n}(k,t) e^{ikx} \right)$$

$$= D \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{n}(k,t) (-k^2) e^{ikx} \right) | e^{-ikx}$$

muß gelten für alle Wellenzahlen k !

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \hat{n}(k,t) = D \hat{n}(k,t) (-k^2)} !$$

lineare, gewöhnl. DGL 1. Ordnung!

$$\rightarrow \hat{n}(k,t) = \hat{n}_0(k) e^{-Dk^2 t}$$

↑
Fouriertransformation
zur Zeit $t=0$!

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} n(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}(k,t) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}_0(k) e^{ikx - iDk^2 t} \end{aligned}$$

IV. Kurven und krummlinige Koordinaten

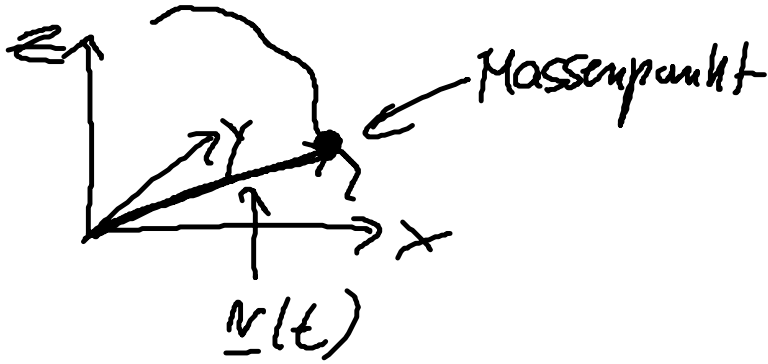
4.1. Bahn eines Körpers im Raum

Betrachte einen sich bewegenden Massenpunkt

Beschreibung durch "Bahnkurve" $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

↑
Ortsvektor
(typischerweise
3-dimensional)
↑
Zeit

Die Bahnkurve ist eine
vektorielle Funktion!

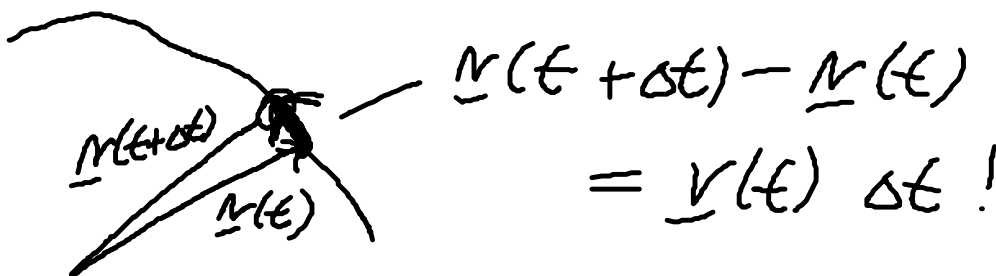


Geschwindigkeit des Körpers

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

wie in
einer
Dimension!



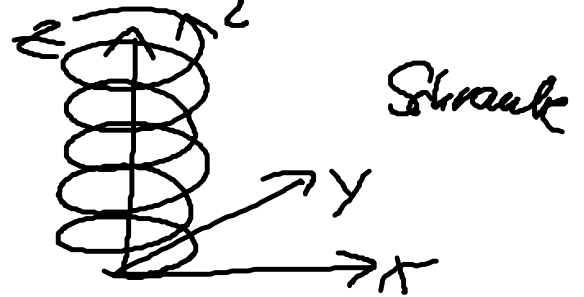
man sieht: Der Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}(t)$
liegt "tangential" zur Bahnkurve!

analog: Beschleunigung

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t)$$

Beispiel: $\underline{r}(t) = (r_0 \sin \frac{t}{\tau}, r_0 \cos \frac{t}{\tau}, v_0 t)$

Projektion auf die
x-y-Ebene ist ein Kreis!

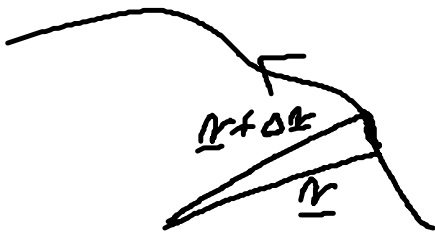


$\Rightarrow \underline{v}(t) = (\frac{r_0}{\tau} \cos \frac{t}{\tau}, -\frac{r_0}{\tau} \sin \frac{t}{\tau}, v_0)$

IV.2. Bogenlänge, begleitendes Dreibein

Alternativ zur Zeit t kann man auch andere Parameter zur Charakterisierung der Raumkurve verwenden!

häufig zweckmäßiger: „Bogenlänge“ s :



$\Delta s \approx \Delta r$

s ist die
Länge der Kurve
zwischen zwei
Punkten!

benutze:

$\underline{\Delta r} = |\underline{v}| \cdot \Delta t \approx \Delta s$

$|\underline{\Delta r}|$

\uparrow

Geschwindigkeit

infinitesimal $\Rightarrow |\underline{v}| = \frac{ds}{dt}$
 $\Delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow s = \int_{t_0}^t dt' |\underline{v}(t')|$$

Länge der Kurve zwischen den Zeiten t_0 und t !

t_0
Anfangszeit

Integration der Geschwindigkeit

\Rightarrow neue Beschreibung der Bahnkurve

$$\underline{\tilde{r}}(s) = \underline{r}(t(s))$$

Ableitung

$$\underline{\tilde{t}}(s) = \frac{d}{ds} \underline{\tilde{r}}(s) \quad \text{Definitionen}$$

$$= \frac{d(\underline{r}(t(s)))}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad \text{Kettenregel!}$$

$$= \underline{v}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}$$

benutze $\frac{ds}{dt} = |\underline{v}| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\underline{v}|}$

$$\rightarrow \underline{\hat{T}}(s) = \underline{v}(t(s)) \cdot \frac{1}{|\underline{v}|}$$

„Tangentialektor“

$$\left(\text{mit } \frac{1}{|\underline{v}|} = \frac{dt}{ds} \right)$$

$$= \frac{\underline{v}(t(s))}{|\underline{v}|}$$

Einheitsvektor der
Geschwindigkeit!