- n tes Moment von $P(x)$

$$\langle x^n \rangle = \int x^n P(x)\, dx \qquad (3.9)$$

(i) Mittelwert: $\langle x \rangle$

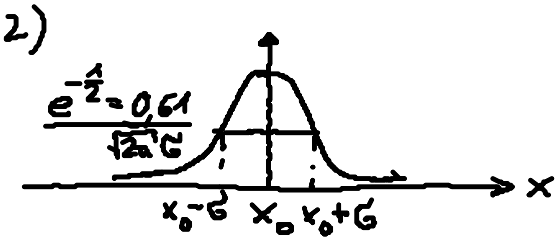
(ii) Variant von x: $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mathrm{Var}(x)$ $\quad$ (3.10)

mittlere quadratische Abweichung

Δx ... Standartabweichung, Unschärfe (3.11)

- Bsp.: Gaußsche/Normal-Verteilung: wichtigste Verteilung!!!

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \qquad (3.12)$$



Momente:

n ungerade: $\langle (x-x_0)^n \rangle = 0$

n gerade: $\langle (x-x_0)^n \rangle = \underbrace{(n-1)!!}_{(n-1)(n-3)\cdots} \sigma^n$

insbes.: $\langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2$

Beweis: Übungen

- $\boxed{\text{Kenntnis aller } \langle x^n \rangle \longleftrightarrow P(x)}$

Beweis: $\longrightarrow$ b)

b) Charakteristische Funktion und Kumulanten

- Def.: $\boxed{G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle}$ (3.13)

.... charakt. Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} &\longrightarrow \quad \langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n}{dk^n} G(k) \Big|_{k=0} \\ &\xrightarrow{\text{Taylor}} \quad G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \end{aligned}} \qquad (3.14)$$

$$\xrightarrow{FT^{-1}} \quad P(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} G(k) \quad \checkmark$$

insbes: $e^{ikx_0} G(k) = \langle e^{-ik(x-x_0)} \rangle = \sum \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x-x_0)^n \rangle$ (3.15)

- erzeugende Funktion für Kumulanten: (3.16)

$$\boxed{\underbrace{\ln G(k)}_{\dots \text{ erzeugende Funktion}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \underbrace{\langle x^n \rangle_c}_{\dots \text{ Kumulanten}} \longleftrightarrow \langle x^n_c \rangle = \frac{\partial^n}{\partial(-ik)^n} \ln G(k) \Big|_{k=0}}$$

Bestimmung der $\langle x^n \rangle_c$:

Entwickle $\ln G(k) \underset{(3.14)}{=} \ln\Big(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle}_{\varepsilon}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\varepsilon^m}{m}$

Sortiere Glieder nach x^ℓ oder $(-ik)^\ell$ (3.17)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle_c &= \langle x \rangle \\
\langle x^2 \rangle_c &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \overset{(3.10)}{=} \Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\
\langle x^3 \rangle_c &= \langle x^3 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2 \langle x^3 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \\
\langle x^4 \rangle_c &= \langle x^4 \rangle - 4 \langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4 \\
&\neq \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle ! \\
&\vdots
\end{aligned}}$$

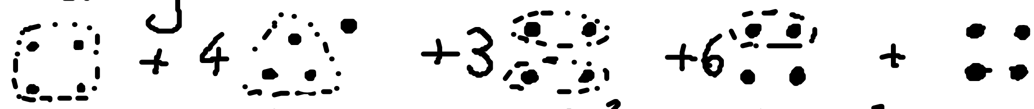
… „wesentliche Momente" von $P(x)$

„ n Punkt – Korrelationen

- Umkehrung:

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \langle x \rangle_c \\
\langle x^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 \\
\langle x^3 \rangle &= \langle x^3 \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c + \langle x \rangle_c^3 \\
\langle x^4 \rangle &= \langle x^4 \rangle_c + 4 \langle x^3 \rangle_c \langle x_c \rangle + 3 \langle x^2 \rangle_c^2 + 6 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 + \langle x \rangle_c^4 \\
&\vdots
\end{aligned}}$$

- graphische Darstellung:

Bsp: $\langle x^4 \rangle =$ 

$$\langle x^4\rangle_c \qquad + 4\,\langle x^3\rangle_c \langle x\rangle_c \qquad + 3\,\langle x^2\rangle_c^2 \qquad + 6\,\langle x^2\rangle_c \langle x\rangle_c^2 \qquad + \langle x\rangle_c^4$$

- allgemein:

$$\boxed{\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}}' m! \prod_n \frac{1}{p_n!\,(n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}}$$

n ... Ordnung des Momentes = "Clusters"

p_n ... Vielfachheit des n Clusters

$\sum'_{\{p_n\}}$ ... über alle Cluster-Gruppen mit $\sum n p_n = m$

$\prod_n \frac{m!}{p_n!\,(n!)^{p_n}}$ ... mögliche Realisierungen der Clustergruppe $\{p_n\}$

- Bsp: Gaußsche Verteilung (3.12)

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - i k x_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -ikx_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2} \xrightarrow[(3.16)]{} \boxed{\begin{array}{l} \langle x\rangle_c = x_0 \\ \langle x^2\rangle_c = \sigma^2 \end{array}}$ (3.20)

... bestimmen die Gaußsche Verteilungen

$\langle x^3\rangle_c = \langle x^4\rangle_c = \ldots = 0$

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen:

(i) Binomial-Verteilung

- Geg: Einzelexperiment mit 2 Ausgängen (ja, nein für spezielles Ereignis)

  also: $x = A, B$ mit $P(A) = p$
  $P(B) = q = 1-p$

  Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

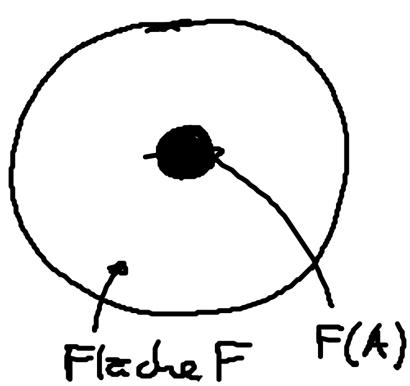
$$\boxed{P_N(N_A) = \underbrace{\binom{N}{N_A}}_{=\frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!}} p^{N_A} q^{N-N_A}} \qquad (3.21)$$

$$\binom{N}{N_A} = \frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!} \quad \ldots \text{ Binomialkoeffizient}$$

- Bsp: (1) Würfel: A … werfe 6, $P(A) = p = \frac{1}{6}$
  B … " keine 6, $P(B) = q = \frac{5}{6}$

  (2) Münze: A … Kopf, B … Zahl

  (3) Dart „ohne Geschicklichkeit"



A … treffe ● $\qquad P(A) = \frac{F(A)}{F}$

B … treffe Rest $\qquad P(B) = 1 - P(A)$

- charakteristische Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = \sum_{N_A} e^{-ikN_A} P_N(N_A)$$

$$= \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} \left(p e^{-ik}\right)^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$\longrightarrow G_N(k) = \left(p e^{-ik} + q\right)^N$$

NB: $(a+b)^N = \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} a^{N_A} b^{N-N_A}$

$$\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = N p q$$

Beweis: • $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln (p e^{-ik} + q)}$

$\ln G_1(k)$: Erzeugende für einen Versuch

• Kumulanten:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n \rangle = 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = N p$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = N (p - p^2) = N p q$$

$$\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \; !$$

Mittelwert immer schärfer für $N \to \infty$

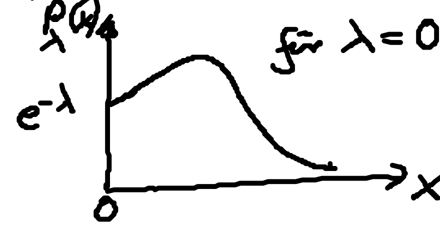
(ii) Poisson-Verteilung

• Geg: Voneinander unabhängige, „seltene" Einzelereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...) die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen

Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

$$\xrightarrow{\text{z.B.}} \quad \boxed{\rho_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \qquad (3.22)$$

$, x = 0, 1, 2, \ldots$



für $\lambda = O(1)$

- Bsp: (1) radioaktive Zerfall in Zeit T

  Anzahl mittlerer Zerfälle: $\lambda = \alpha T$, α ... Zerfallsrate

  $$\longrightarrow \quad \rho_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

  ... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

  (2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$