

• n tes Moment von $P(x)$

$$\langle x^n \rangle = \int x^n P(x) dx \quad (3.9)$$

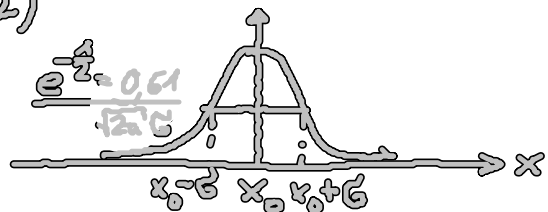
(i) Mittelwert: $\langle x \rangle$

(ii) Varianz von x : $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$
 mittlere quadratische Abweichung = $\text{Var}(x)$

Δx ... Standardabweichung, Unschärfe (3.11)

• Bsp: Gaußsche/Normal-Verteilung: wichtigste Verteilung!!!

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.12)$$



Momente:

n ungerade: $\langle (x-x_0)^n \rangle = 0$

n gerade: $\langle (x-x_0)^n \rangle = \underbrace{(n-1)!!}_{(n-1)(n-3)\dots} \sigma^n$

insbes: $\langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2$

Beweis: Übungen

Kerntrick aller $\langle x^n \rangle \iff P(x)$

Beweis: \rightarrow b)

b) Charakteristische Funktionen und Kumulanten

• Def: $G(k) = \int dx e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle$ (3.13)

... charakt. Funktion

$$\rightarrow \langle x^n \rangle = \frac{1}{(i)^n} \left. \frac{d^n}{dk^n} G(k) \right|_{k=0} \quad (3.14)$$

Taylor $G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$

$$\xrightarrow{FT^{-1}} P(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} G(k) \quad \checkmark$$

insbes: $e^{ikx_0} G(k) = \langle e^{-ik(x-x_0)} \rangle = \sum \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x-x_0)^n \rangle$ (3.15)

• erzeugende Funktion für Korrelanten: (3.16)

$$\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \iff \langle x^n \rangle_c = \frac{\partial^n}{\partial (-ik)^n} \ln G(k) \Big|_{k=0}$$

... erzeugende Funktion ... Korrelanten

Bestimmung der $\langle x^n \rangle_c$:

Entwickle $\ln G(k) = \ln \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \right) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\varepsilon^m}{m}$ (3.14)

Sortiere Glieder nach x^l oder $(-ik)^l \varepsilon$ (3.17)

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle x \rangle_c &= \langle x \rangle \\ \langle x^2 \rangle_c &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \stackrel{(3.10)}{=} \Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ \langle x^3 \rangle_c &= \langle x^3 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2 \langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \\ \langle x^4 \rangle_c &= \langle x^4 \rangle - 4 \langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4 \\ &\neq \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle! \\ &\vdots \end{aligned}$$

... "wesentliche Momente" von $P(x)$
n Punkt - Korrelationen

• Umkehrung:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle x \rangle_c \\ \langle x^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 \\ \langle x^3 \rangle &= \langle x^3 \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c + \langle x \rangle_c^3 \\ \langle x^4 \rangle &= \langle x^4 \rangle_c + 4 \langle x^3 \rangle_c \langle x \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c^2 + 6 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 \\ &\quad + \langle x \rangle_c^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

• graphische Darstellung:

Bsp: $\langle x^4 \rangle = \langle x^4 \rangle_c + 4 \langle x^3 \rangle_c \langle x \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c^2 + 6 \langle x \rangle_c \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^4$

• allgemein:

$$\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}} m! \prod_n \frac{1}{p_n! (n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}$$

n ... Ordnung des Moments = "Cluster"

p_n ... Vielfachheit des n Cluster

$\sum_{\{p_n\}}$... über alle Cluster-Gruppen mit $\sum n p_n = m$

$\prod_n \frac{m!}{n p_n! (n!)^{p_n}}$... mögliche Realisierungen der Clustergruppe $\{p_n\}$

• Bsp: Gaußsche Verteilung (3.12)

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2 \sigma^2}{2} - i k x_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -i k x_0 - \frac{k^2 \sigma^2}{2}$ (3.16)

$$\langle x \rangle_c = x_0 \quad (3.20)$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \sigma^2$$

... bestimmen die Gaußsche Verteilungen

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^4 \rangle_c = \dots = 0$$

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen:

(i) Binomial-Verteilung

- Geg: Einzelexperiment mit 2 Ausgängen (ja, nein für spezielles Ereignis)
also: $x = A, B$ mit $P(A) = p$
 $P(B) = q = 1 - p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

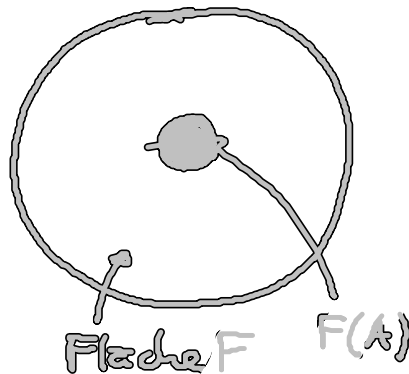
$$P_N(N_A) = \binom{N}{N_A} p^{N_A} q^{N-N_A} \quad (3.21)$$

$$= \frac{N!}{N_A! (N-N_A)!} \dots \text{Binomial Koeffizient}$$

- Bsp: (1) Würfel: A ... werf 6, $P(A) = p = \frac{1}{6}$
B ... " keine 6, $P(B) = q = \frac{5}{6}$

(2) Münze: A ... Kopf, B ... Zahl

(3) Dart „ohne Geschicklichkeit“



A ... treffe ●

B ... treffe Rest

$$P(A) = \frac{F(A)}{F}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

• charakteristische Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = \sum_{N_A} e^{-ikN_A} P_N(N_A)$$

$$= \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} (pe^{-ik})^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$\rightarrow G_N(k) = (pe^{-ik} + q)^N$$

$$\text{NB: } (a+b)^N = \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} a^{N_A} b^{N-N_A}$$

$$\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$$

Beweis: • $\ln G_N(k) = N \ln(pe^{-ik} + q)$

$\ln G_1(k)$: Erzeugende für einen Versuch

• Kummulanten:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n \rangle = 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = N(p - p^2) = Npq$$

$$\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2$$

$$\rightarrow \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}}!$$

Mittelwert immer schärfer für $N \rightarrow \infty$

(ii) Poisson-Verteilung

- Geg: Voneinander unabhängige, "seltene" Einzelereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...) die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen

Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse

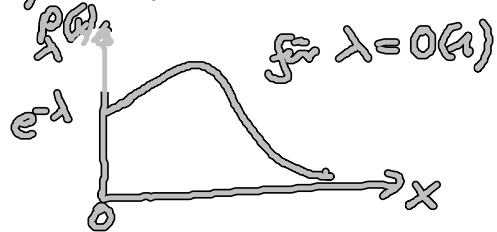
mit $\langle x \rangle = \lambda$

o.B. \rightarrow

$$P_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

(3.22)

$x = 0, 1, 2, \dots$



• Bsp: (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

Anzahl mittlere Zerfälle: $\lambda = \alpha T$, $\alpha \dots$ Zerfallsrate

$$\rightarrow P_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

... Wahrscheinlichkeit für
x Zerfälle in T

(2) Dazw mit $\underbrace{F(\lambda) \ll F}$

Treff ist selteres Ereignis