(ii) Poisson-Verteilung

$$\boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \quad , x = 0, 1, 2, \dots \qquad (3.22)$$

... Wahrscheinlichkeit für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

- charakteristische Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \exp[\lambda(e^{-ik} - 1)] \qquad (3.23)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}$$

$$\longrightarrow \ln G(k) = \lambda (e^{-ik} - 1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \qquad (3.24)$$

$$\xrightarrow[\text{mit } (3.16)]{\text{Vgl.}} \boxed{\text{Kummulanten } \langle x^n \rangle_c = \lambda} \qquad (3.25)$$

insbesondere: $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

- Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \to 0$ „seltenes Ereignis"

$N \to \infty$

so daß $\langle N_A \rangle = Np = \lambda = $ konst.

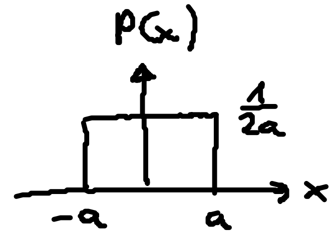
$$\boxed{P_N(N_A) \longrightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \qquad (3.26)$$

Beweis: Übungen!

b) <u>kontinuierliche Verteilungen</u>

(i) <u>homogene Verteilung</u>

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases} \qquad (3.27)$$



· Momente:
$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1} & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew. Übungen

· charakt. Funktion:
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka} \quad , \quad G(0) = 1 \text{ ... Normierung!}$$

Bew. Übungen

· Kumulanten?

(ii) <u>Normal-/Gaußsche Verteilung</u>

s.o.

(iii) <u>Exponentielle Verteilung</u>

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Momente, charakt. Funktion, Kumulanten (s. Übungen)

3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

· stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$p(\underline{x})\, d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[(x_1, x_1 + dx_1), \ldots, (x_n, x_n + dx_n)]$

- unabhängige stochastische Variable: x, y

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)\,P(y)\,dx\,dy} \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- <u>Def:</u> Korrelationsfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \quad (3.30)$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

Bsp: $P(x,y) = P(x)\,P(y)$

$$\longrightarrow C_{xy} = \int dx\,dy\; P(x)\,(x - \langle x \rangle)\; P(y)\,(y - \langle y \rangle)$$
$$= 0\,!$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte für $[(x_1, x_1 + dx_1), \dots, (x_{n-1}, x_{n-1} + dx_{n-1})]$

$$\boxed{P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n\; P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)} \quad (3.31)$$

- <u>Satz:</u>

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1 \dots, x_k | x_{k+1} \dots x_n)$ für $x_1, \dots, x_k$, wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int dx_1 \dots dx_k\; P(x_1, \dots, x_n)$

„Beweis": $\int P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1} \dots x_n)\,dx_1 \dots dx_k = 1\,!$ Normierung

stochastisch unabh. Variablen: $P(x|y) = \dfrac{P(x)\,P(y)}{P(y)} = P(x)\,!$

3.5 <u>Zentraler Grenzwertsatz</u>

- zentraler Satz für Stat. Mechanik

• Satz:

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_N$ voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.
Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$ im Grenzfall $N \to \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta y)^2}} \, e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \qquad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \, \Delta x^2$.

Insbesondere gilt: $\dfrac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \dfrac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

• Bsp: (i) System nicht wechselwirkender Teilchen

x_i = Energie des i-ten Teilchens

y = Gesamtenergie

(ii) Zufallsbewegung („random walk")

insbesondere: Brownsche Bewegung

x_i = Zuwachs beim i-ten (mikroskopischen) Schritt (z.B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)

y = Position nach N Schritten

• Beweis:

Führe ein: $$z(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}} \qquad (3.34)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(z) \overset{(3.8)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{„unabh. Ereignisse"}} \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N}\langle x \rangle\right)$$

$$\left[\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\dots}\right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N \, w(x_1) \dots w(x_N) \, e^{-ik\frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + ik\sqrt{N}\langle x \rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + ik\sqrt{N}\langle x \rangle} \underbrace{\left[G\left(\tfrac{k}{\sqrt{N}}\right)\right]^N}_{\text{charakt. Fkt. zu } w(x)}$$

$$\text{mit } G\left(\tfrac{k}{\sqrt{N}}\right) \overset{(3.16)}{=} \exp\left[-i\frac{k}{\sqrt{N}}\underbrace{\langle x \rangle_c}_{\langle x \rangle} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N}\underbrace{\langle x^2 \rangle_c}_{(\Delta x)^2} + \frac{1}{6}\frac{k^3}{N^{3/2}}\langle x^3 \rangle_c + \dots\right]$$

Kumulanten einführen

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{1}{2}k^2 \Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{k^3}{\sqrt{N}}\langle x^3 \rangle_c + \dots}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{mit } N \to \infty \\ G_p(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2 \Delta x^2}\end{array}\right\} \longrightarrow P(z) \underset{(3.19)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta x)^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

... charakteristische Fkt. von $P(z)$

$$\text{mit } P(z)\,dz = P(y)\,dy \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\longrightarrow P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N (\Delta x)^2}} e^{-\frac{(y - N\langle x \rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \quad \text{qed}$$

- Bem: (3.33) auch gültig für abhängige x_i unter gewissen Bedingungen

4. Kinetische Theorie der Gase

- Studium der makroskopischen Eigenschaften einer großen Zahl von Teilchen, ausgehend von (klassischen) Bewegungsgl.

- Ziele:
  (i) Motivation des zentralen Postulats der Stat. Mechanik
  (ii) Diskussion von Irreversibilität anhand der Boltzmann-Gl. und H-Theorem
  (iii) Herleitung makroskopischer Bewegungsgln.

4.1 Der Liouvillesche Satz und Implikationen

- System von N wechselwirkenden Teilchen

Mechanik: dessen Mikrozustand eindeutig bestimmt durch

Orte $q \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ und

Impulse $p \equiv \{p_1, \dots, p_N\}$

$\{q, p\}$ = Punkt im $6N$ dimens. Phasenraum Γ

- Dynamik: Hamiltonschen Bewgln.

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad H \dots \text{Hamiltonoperator}} \tag{4.1}$$

Zeitumkehrsymmetrie:

$$t \to -t, \quad p_i \longrightarrow -p_i, \quad H(q,p) = H(q,-p)$$

$\Longrightarrow$ (4.1) ist zeitumkehrinvariant

$\longrightarrow$ zeitumgekehrte Bahnen $q(-t)$ sind auch Lsg. von (4.1)

also: (4.1) beschreiben reversible Vorgänge