

## 4.3 Die Boltzmann-Gleichung

### 4.3.1 "Herleitung" bzw. Motivation

• Bewgl. für  $f_1$ : (4.12)  $\rightarrow$

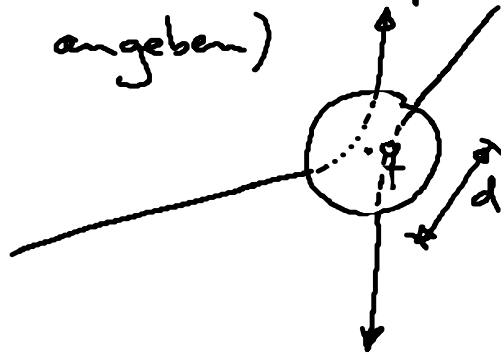
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\} = \int dV_2 \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \quad (4.13)$$

• Abbruchbedingung + "Vergrößerung" (<sup>engl:</sup> "coarse graining"):

$$f_2(q_1, p_1, q_2, p_2, t) \rightarrow f_1(q_1, p_1, t) f_1(q_2, p_2, t) \quad (4.14)$$

Bem: (i) Annahme: Potential  $V(q_1 - q_2)$  hat endliche Reichweite  $d \rightarrow$  für  $q_1 - q_2 \gg d$  keine 2-Teilchen-Korrelationen  $\hat{=}$  molekulares Chaos

(ii) Führe ein: Stoßpkt.  $q$  der Teilchen  
(soll Ort des Stoßvolumens mit Durchmesser  $d$  angeben)



$\rightarrow$  Vergrößerung der Längenskala } Stoß wird  
" " Zeit " } räumlich/zeitlich  
" " " } nicht aufgelöst

≙ Informations-  
Verlust!

• Abkürzungen:

$$(i) \left. \begin{aligned} f_1(q, p_1, t) = f(q, p, t) = f = f_1 \\ f_i(q, p_i, t) = f(q, p, t) = f_i, \quad i \geq 2 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

$$(ii) \left. \begin{aligned} \{H_1, f\} &= \frac{\partial H_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}, \quad H_1 = \frac{p^2}{2m} + U(q) \\ &= -\underline{F} \cdot \nabla_p f - \frac{p}{m} \cdot \nabla_q f \quad \text{mit } \underline{F} = -\nabla_q U \dots \\ &\quad \text{äußere Kraft} \end{aligned} \right\} (4.16)$$

• Boltzmann-Gl. (4.15), (4.16) in (4.13)

[Form des Stoßtermes ohne Beweis]

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p \right) f(q, p, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{Stoß}}$$

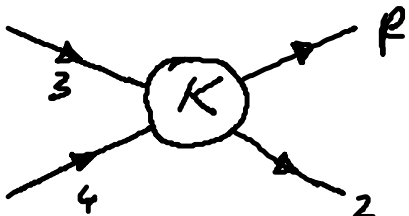
$$\begin{aligned} \text{mit } \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{Stoß}} &= \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(p, p_2; p_3, p_4) [f_3 f_4 - f f_2] \\ &= G - V \quad \dots \text{ Boltzmannscher} \\ &\quad \text{Stoßzahlansatz} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$G$  }  $d^3 q d^3 p$  ... Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit  
in } Volumen  $d^3 q d^3 p$  hinein } gestreut  
aus } Volumen  $d^3 q d^3 p$  heraus }  
werden.

Bedeutung: Änderung von  $f$  durch Stoßprozesse

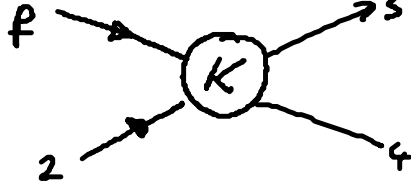
$K(p, p_2; p_3, p_4)$  ... Übergangswahrscheinlichkeit für  $p_3, p_4 \rightarrow p, p_2$

(i)  $G$  (Gewinn term)



„erzeugt“ Teilchen mit Impuls  $p$

(ii)  $V$  (Verlustterm)



„vernichtet“ Teilchen mit Impuls  $p$

(iii)  $K(\dots) f_i f_j d^3 p_2 d^3 p_3 d^4 p_4 \dots$  Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit im Volumen  $d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4$

• Symmetrien von  $K$ :

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen

$$K(p, p_2; p_3, p_4) = K(p_2, p; p_4, p_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei  $D \in O(3)$

$$K(Dp, Dp_2; Dp_3, Dp_4) = K(p, p_2; p_3, p_4) \quad (4.19)$$

insbesondere:  $Dp = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz

$$K(-p_3, -p_4; -p, -p_2) = K(p, p_2; p_3, p_4) \quad (4.20)$$

$$(ii), (iii) \rightarrow K(p, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p, p_2) \quad (4.21)$$

• genaue Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:

s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles

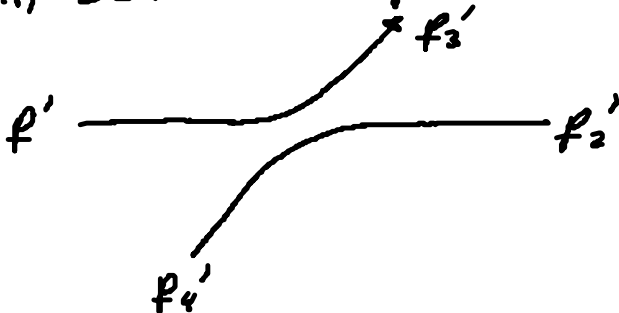
• Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

(4.22)

$$K(p, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p + p_2 - p_3 - p_4) \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpunktssystem (')



Gesamtimpuls = null

Relativkoordinat: Streuung eines Teilchens am anderen  
(vgl. Keplerproblem): hier: 2 on 1

Intensität des Teilchenstrahls:

$$I = f(q, p_2) d^3 p_2 |v - v_2| \quad (\text{Stromdichte})$$

= Zahl der einfallenden Teilchen 2 pro Zeit und Fläche

$dN(\hat{v})$  ... Zahl der pro Zeit in das Raumelement  $d\Omega$  um die Richtung  $\hat{v}$  gestreuten Teilchen



→ differentieller Streuquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega}} \quad (4.23)$$

z.B. → Verlustterm:  $\int d^3 p_2 dN f(q, p, t)$  (4.24)

“o.B.”  
⇒

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v - v_2| \left[ \underbrace{f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q, p, t) f(q, p_2, t)}_{f f_2} \right]$$

Bem:  $f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)$

↘ über Erhaltungssätze mit  $p, p_2$  verknüpft

hier wichtig: nur vor dem Stoß, molekulares Chaos“  
d.h. keine Korrelationen.

## 4.3.2 Das H-Theorem

• Theorem:

Falls  $f(q, p, t)$  die Boltzmann-Gl. erfüllt, gilt  
 für  $H(t) = \int d^3q d^3p f(q, p, t) \ln f(q, p, t)$ ,  
 daß  $\frac{dH}{dt} \leq 0$

→ Boltzmann Gl. beschreibt irreversible Vorgänge,  
 obwohl die zugrunde liegenden mikroskopischen  
 Gl. reversible Prozesse erlauben!

• Beweis:

$$\frac{dH}{dt} \stackrel{(4.25)}{=} \int dV \frac{\partial f}{\partial t} (1 + \ln f)$$

$$\stackrel{(4.17)}{=} - \int dV (1 + \ln f) \left( \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) f + \int dV \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{Stoß}} (1 + \ln f)$$

$$= - \int dV \left( \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) (f \ln f) + \quad "$$

↓                      ↓  
 Oberflächenstrom = 0

da  $f \ln f \rightarrow 0$  für  $f \rightarrow 0$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \stackrel{(4.17)}{=} - \int d^3q_1 d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 K(p_1, p_2; p_3, p_4) \left[ f_1 f_2 - f_3 f_4 \right] (1 + \ln f_1)$$

$f = f_1$   
 $q = q_1$   
 $p = p_1$

$K$  invariant unter  $1, 3 \leftrightarrow 2, 4$  und  
 $1, 2 \leftrightarrow 3, 4$  [s. (4.18) (4.21)]

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} = - \frac{1}{4} \int d^3q_1 d^3p_1 \dots K(\dots) \left[ f_1 f_2 - f_3 f_4 \right] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4} \quad (4.26)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$

Bsp:  $f_1 f_2 > f_3 f_4 \dots$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \text{ qed}$$