

4.3 Die Boltzmann-Gleichung

4.3.1 "Herleitung" bzw. Motivation

- Bewgl. für f_1 : (4.12) \rightarrow

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\} = \int dV_2 \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \quad (4.13)$$

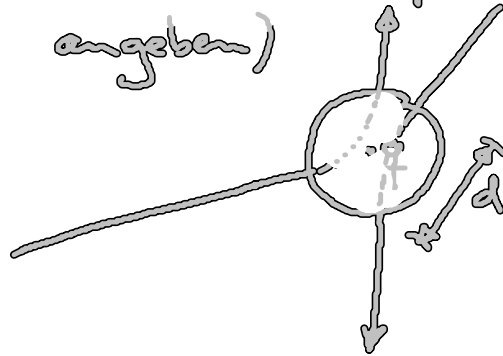
- Abnahmbedingung + "Vergrößerung" (engl: "coarse graining"):

$$f_2(q_1, p_1, q_2, p_2, t) \rightarrow f_1(q_1, p_1, t) f_1(q_2, p_2, t) \quad (4.14)$$

Bem: (i) Annahme: Potential $V(q_1 - q_2)$ hat endliche Reichweite $d \rightarrow$ für $q_1 - q_2 \gg d$ keine 2-Teilchen-Korrelationen $\hat{=}$ molekulares Chaos

(ii) Führe ein: Stoßpkt. q der Teilchen

(soll Ort des Stoßvolumens mit Durchmesser d angeben)



\rightarrow Vergrößerung der Längenskala } Stoß wird
" " Zeit " } räumlich/zeitlich
" " " } nicht aufgelöst

≙ Informations-
Verlust!

• Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad f_1(q, p_1, t) &= f(q, p, t) = f = f_1 \\ f_i(q, p_i, t) &= f(q, p, t) = f_i, \quad i \geq 2 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(ii)} \quad \{H_1, f\} &= \frac{\partial H_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}, \quad H_1 = \frac{p^2}{2m} + U(q) \\ &= -\underline{F} \cdot \nabla_p f - \frac{p}{m} \cdot \nabla_q f \quad \text{mit } \underline{F} = -\nabla_q U \dots \\ &\quad \text{äußere Kraft} \end{aligned} \right\} (4.16)$$

• Boltzmann-Gl. (4.15), (4.16) in (4.13)

[Form des Stoßterms ohne Beweis]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p \right) f(q, p, t) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}}$$

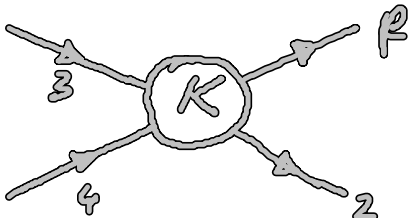
$$\begin{aligned} \text{mit } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}} &= \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(p, p_2; p_3, p_4) [f_3 f_4 - f f_2] \\ &= G - V \quad \dots \text{ Boltzmannscher} \\ &\quad \text{Stoßzahlansatz} \end{aligned} \quad (4.17)$$

G } $d^3 q d^3 p$.. Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit
in } Volumen $d^3 q d^3 p$ hinein } gestreut
aus } Volumen $d^3 q d^3 p$ heraus }
werden.

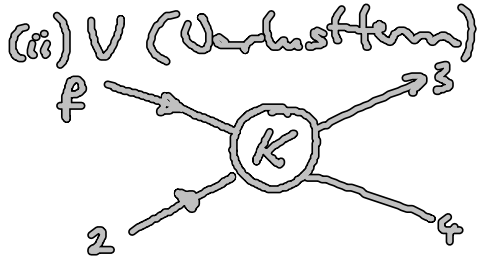
Bedeutung: Änderung von f durch Stoßprozesse

$K(p, p_2; p_3, p_4)$.. Übergangswahrscheinlichkeit für $p_3, p_4 \rightarrow p, p_2$

(i) G (Gewinn \dot{m})



„erzeugt“ Teilchen mit Impuls p



, vernichtet' Teilchen mit Impuls p

(iii) $K(\dots) \delta_i \delta_j d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \dots$ Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit im Volumen $d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4$

• Symmetrien von K :

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen

$$K(p, p_2; p_3, p_4) = K(p_2, p; p_4, p_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei $O \in O(3)$

$$K(O p, O p_2; O p_3, O p_4) = K(p, p_2; p_3, p_4) \quad (4.19)$$

insbesondere: $O p = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz

$$K(-p_3, -p_4; -p, -p_2) = K(p, p_2; p_3, p_4) \quad (4.20)$$

(ii), (iii) $\longrightarrow K(p, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p, p_2) \quad (4.21)$

• genaue Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:

s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles

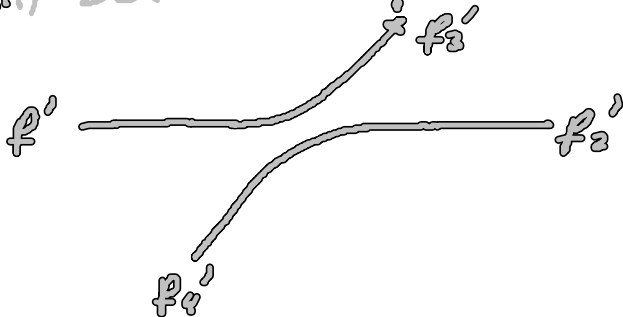
• Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

(4.22)

$$K(p, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p + p_2 - p_3 - p_4) \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpunktssystem (')



Gesamtimpuls = null

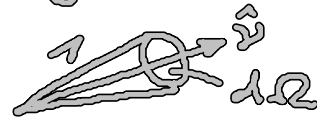
Relativkoordinaten: Streuung eines Teilchens am anderen
(vgl. Keplerproblem): hier: 2 on 1

Intensität des Teilchenstrahls:

$$I = f(q, p_2) d^3 p_2 |v - v_2| \quad (\text{Stromdichte})$$

= Zahl der einfallenden Teilchen 2 pro Zeit und Fläche

$dN(\mathcal{D})$.. Zahl der pro Zeit in das Raumelement $d\Omega$ um die Richtung \hat{v} gestreuten Teilchen



→ differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega} \quad (4.23)$$

z.B. → Verlustterm: $\int d^3 p_2 dN f(q, p, t)$ (4.24)

“o.B.”
⇒

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{St}\beta} = \int d^3 p_2 d\Omega \left| \frac{d\mathcal{G}}{d\Omega} \right| |v - v_2| \left[\underbrace{f(q, p_3, t) f(q, p_1, t)}_{f_3 f_1} - \underbrace{f(q, p_1, t) f(q, p_2, t)}_{f_1 f_2} \right]$$

Bem: $f(q, p_3, t) f(q, p_1, t)$

↪ aber Erhaltungssätze mit p, p_2 verknüpft

hier wichtig: nur vor dem Stoß, molekulares Chaos“
d.h. keine Korrelationen.

4.3.2 Das H-Theorem

• Theorem:

Falls $f(q, p, t)$ die Boltzmann-Gl. erfüllt, gilt für $H(t) = \int d^3q d^3p f(q, p, t) \ln f(q, p, t)$, dass $\frac{dH}{dt} \leq 0$

→ Boltzmann Gl. beschreibt irreversible Vorgänge, obwohl die zugrunde liegenden mikroskopischen Gl. reversible Prozesse erlauben!

• Beweis:

$$\frac{dH}{dt} \stackrel{(4.17)}{=} \int dV \frac{\partial f}{\partial t} (1 + \ln f)$$

$$\stackrel{(4.17)}{=} - \int dV (1 + \ln f) \left(\frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) f + \int dV \frac{\partial f}{\partial t} (1 + \ln f)$$

$$= - \int dV \left(\frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) (f \ln f) + \dots$$

↓ ↓
Oberflächenintegral = 0

da $f \ln f \rightarrow 0$ für $f \rightarrow 0$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \stackrel{(4.17)}{=} - \int d^3q_1 d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 K(p_1, p_2; p_3, p_4) [f_1 f_2 - f_3 f_4] (1 + \ln f_1)$$

$f = f_1$
 $q = q_1$
 $p = p_1$

K invariant unter $1, 3 \leftrightarrow 2, 4$ und $1, 2 \leftrightarrow 3, 4$ [S. (4.18) (4.20)]

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} = - \frac{1}{4} \int d^3q_1 d^3p_1 \dots K(\dots) [f_1 f_2 - f_3 f_4] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4} \quad (4.25)$$

≥ 0

≥ 0

Bsp: $f_1 f_2 > f_3 f_4 \dots$

→ $\frac{dH}{dt} \leq 0$ qed