4.3.2 Das H-Theorem

(4.25)

$$\boxed{\begin{array}{l} f(q,p,t) \text{ erfüllt Boltzmann-Gleichung} \\ \longrightarrow \quad \frac{dH}{dt} \leq 0 \quad \text{mit } H(t) = \int d^3q\, d^3p\, f(q,p,t) \ln f(q,p,t) \end{array}}$$

Beweis: ....

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int d^3q_1\, d^3p_1 \ldots d^3p_4\, \underbrace{K(p_1,p_2;p_3,p_4)}_{\geq 0}\, \underbrace{[f_1 f_2 - f_3 f_4] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}}_{\geq 0}}$$

$$\longrightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \;!!!$$

- Bemerkungen:

(i) $-H \sim$ Informationsentropie

$-H \sim$ Boltzmann-Entropie für $f =$ konstant

} H-Theorem ist Bsp. für Entropiezuwachs

⋮

(ii) Grund für Irreversibilität:

(1) Annahme des molekularen Chaos

(2) „Vergröberung" der Längen- und Zeitskala

} Verlust an Information über System

4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

(i) <u>Gleichgewichtsverteilungen</u>:

- Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0$

$\xrightarrow{(4.26)}$ $f_1 f_2 = f_3 f_4 \longrightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\substack{\text{vor} \\ \text{nach}}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\substack{\text{nach} \\ \text{vor}}}$ Stoß

erfüllt durch additive Größen, die bei Stoß erhalten bleiben:

$\longrightarrow$ Stoßinvarianten:

$$\boxed{\begin{aligned} &\chi^i = p_i \;, \quad i = 1,2,3 && \ldots \text{Impuls} \\ &\chi^4 = \frac{p^2}{2m} && \ldots \text{kinetische Energie} \\ &\chi^5 = 1 && \ldots \text{Teilchenzahl} \end{aligned}} \quad (4.27)$$

$$\longrightarrow \ln f = a(q) + \underline{\alpha}(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\longrightarrow f(q,p) = N(q) \exp\left[\alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}\right] \quad (4.28)$$

- Lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3p \; f(q,p) = n(q,t)$ ...Teilchendichte

$$n \overset{(4.28)}{=} N(q) \prod_{i=1}^{3} \int dp_i \; \exp\left(\alpha_i p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m}\right)$$ [<u>keine</u> Einsteinsche Summenkonvention]

$$= N(q) \prod_{i=1}^{3} \int dp_i \exp\left\{-\frac{\beta}{2m}\left(p_i - \frac{m\alpha_i}{\beta}\right)^2 + \frac{m\alpha_i^2}{2\beta}\right\}$$

$$= N(q) \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m\alpha^2}{2\beta}\right) \qquad (4.29)$$

„Umbenennung"

$$\boxed{f(q,p,t) = n(q,t)\,\frac{1}{[2\pi m k_B T(q,t)]^{3/2}}\,\exp\left[-\frac{(p - m\,\underline{u}(q,t))^2}{2 m k_B T(q,t)}\right]}$$

mit $n(q,t)$ ... Teilchenzahldichte

$k_B T(q,t) = \beta^{-1}$ ... lokale Temperatur (s.u.)

$m\,\underline{u}(q,t) = \langle p \rangle = \frac{m\alpha}{\beta}$ ... lokaler mittlerer Impuls

... lokale Maxwell-Verteilung

" Gleichgewichtsverteilung

• globales Gleichgewicht: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \wedge \{H_1, f\} = 0$

(für Gas im Volumen V mit $u = 0$) $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{N}{V} = \text{konstant} \\ T \quad = \quad " \end{array} \right.$

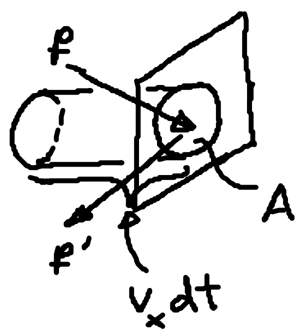
$$\longrightarrow \boxed{f(q,p) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2 m k_B T}\right)} \qquad (4.30)$$

... Maxwellverteilung

Original: $p \longrightarrow m\underline{v}$

(ii) Zustandsgleichung: für Gas mit N Teilchen in Vol. V

• Druck ≙ Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit p, die A treffen in dt: $dN(p) = f(p)\, d^3p\, \underbrace{(A v_x dt)}$

Volumen von Teilchen, die in dt die Fläche A treffen

$$\longrightarrow F = \int_{-\infty}^{0} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y\, dp_z\, f(p) \left(A \frac{p_x}{m} \cancel{dt}\right) \frac{2p_x}{\cancel{dt}}$$

$$\longrightarrow \quad p = \frac{F}{A} = \int d^3p\, f(p)\, \frac{p_x^2}{m} \overset{(4.30)}{=} \frac{n}{\beta}$$

$$\xrightarrow{n=\frac{N}{V}} \quad \boxed{pV = N k_B T \quad , \text{ falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \quad (4.31)$$

Identifikation von T über ideale Gasgleichung!

4.4. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

. Weg ins Gleichgewicht:

(i) auf Zeitskala der Stöße τ_c

$$f_2(\ldots) = f_1(\ldots)\, f_1(\ldots) \quad \text{für } |q_1 - q_2| \gg \text{Reichweite WW-Potentials}$$

(ii) in mittlerer stoßfreier Zeit $\tau \gg \tau_c$

Stoßinvarianten gelten $\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ lokales GG

mit $n(q,t)$, $T(q,t)$

lokale Erwartungswerte

$$\langle A(q,p,t)\rangle = \int d^3p\, \underbrace{f(q,p,t)}_{\text{lokale Maxwell-verteilung (4.29)}}\, A(q,p,t)$$

bestimmt durch Stoßterm $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}}$ in (4.17)

(iii) Dynamik auf Zeiten $\tau_H \gg \tau$

bestimmt durch Strömungsterm in (4.17)

$\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ globales GG

τ_H bestimmt durch die Zeitentwicklung von Erhaltungsgrößen = hydrodynamische Variable

4.4.1. Erhaltungssätze

- Stoßinvarianten $\longrightarrow$ Erhaltungsgrößen

$\chi^5 = 1 \longrightarrow$ Teilchenzahldichte $n(q,t) = \int d^3p \; 1 \, f = \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \longrightarrow$ Impulsdichte $= m \times$ Teilchenstromdichte $j_i(q,t)$

$$j_i(q,t) \equiv n(q,t)\, u_i(q,t) = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \left\langle \frac{p_i}{m} \right\rangle$$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ Energiedichte

$$n(q,t)\Big[\underbrace{\frac{m\,\underline{u}^2(q,t)}{2}}_{\substack{\text{kinet. Energie}\\ \text{der lokalen}\\ \text{konvektiven}\\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(q,t)}_{\substack{\text{innere Energie}\\ \text{pro Teilchen}\\ = \text{mittlere kinetische}\\ \text{Energie im lokalen}\\ \text{Ruhesystem}}}\Big] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$$

mit $$n e = \frac{m}{2} \int d^3p \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2 f = \left\langle \frac{m}{2} \Big(\underbrace{\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}}_{\underline{c}}\Big)^2 \right\rangle$$

wobei $\langle \underline{c} \rangle = 0$

(4.32)