

- Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen:
allgemein.

$$\int d^3p \text{ Boltzmann Gl. (4.17)} \times \chi^\alpha$$

$$\text{mit } \int d^3p \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Sto\ss}} \chi^\alpha = 0 !$$

partielle Integr.
Oberflächenterm = 0

[s. Herleitung H-Theorem]

$$\rightarrow \int d^3p \chi^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right] f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0$$

$$\rightarrow \int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial t} (\chi^\alpha f) + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_q (\chi^\alpha f) - f \mathbf{E} \cdot \nabla_p \chi^\alpha \right] = 0 \quad (4.33)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^\alpha \rangle + \nabla_q \cdot \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \chi^\alpha \rangle = \mathbf{E} \cdot \langle \nabla_p \chi^\alpha \rangle}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ Dichte
 div (Stromdichte)
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ Quelle / Senke

... Bilanzgleichung für Dichte $\langle \chi^\alpha \rangle$

Anwendung auf

(i) Teilzahlerhaltung: $\chi^S = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot \mathbf{j} = 0}$$

mit $\mathbf{j} = n \mathbf{u} = \langle \frac{\mathbf{p}}{m} \rangle$ (4.34)

... Kontinuitätsgleichung

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i \quad i = 1, 2, 3$

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{1}{m} \nabla_j \langle p_i p_j \rangle = n F_i \quad \text{mit } \nabla_i = (\nabla_q)_i$$

$$m^2 \langle (u + \epsilon)_i (u + \epsilon)_j \rangle = m^2 n u_i u_j + m^2 \langle c_i c_j \rangle$$

$\langle c_i \rangle = 0$

$$\rightarrow m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \nabla_j \underbrace{\left(\frac{m n u_i u_j}{m j_i} - T_{ij} \right)}_{\text{Impulsstromdichte (Tensor 2. Stufe!!)}} = n F_i$$

$m j_i u_j = m n u_i u_j \dots$ konvektiver Anteil
 $= \text{Impulsdichte} \times \text{Geschw.}$

$T_{ij} = -m \langle c_i c_j \rangle \dots$ Spannungstensor (= -Drucktensor)
 (wegen innerer Kräfte)

$n F_i \dots$ Volumen kraftdichte äußere Kräfte

(4.35)

Umschreibung, mit (4.34), o. B.

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla_q \right) u_i = \nabla_j T_{ij} + n F_i \quad (4.36)$$

Massen-
dichte

konvektive
Ableitung

Oberflächenkräfte!

totale / materielle
Zeitableitung

$$\left[\int d^3q \nabla_j T_{ij} = \int T_{ij} d^2f_j ! \right]$$

i-te Komp. der
Oberflächenkraft

z. B. Druck- / Reibungskräfte

(4.36) \equiv Newtonsche Grundgleichung

linke Seite: Beschleunigung eines Vol. elementes mit
Geschw \underline{u}

rechte " : Oberflächen + äußere Kräfte auf Vol. element

(iii) Energieerhaltung: $\chi^S = \frac{p^2}{2m}$

$$(1) \frac{1}{m} \langle p_i \chi^S \rangle = \langle (u_i + c_i) \frac{p^2}{2m} \rangle$$

$$= u_i \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \frac{m}{2} \langle c_i (u_j + c_j)^2 \rangle$$

$$(4.32) \quad \langle c_i \rangle = 0$$

$$= n u_i \left(\frac{m}{2} \underline{u}^2 + e \right) + m u_j \underbrace{\langle c_i c_j \rangle}_{-u_j T_{ij}} + \underbrace{\langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle}_{\text{Wärmestrom}}$$

$$(2) \quad \langle \nabla_p \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \frac{p}{m} \rangle = j$$

mit
(1), (2)
in (4.33)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[n \left(\frac{m}{2} \underline{u}^2 + e \right) \right] + \nabla_i \left[\underbrace{n u_i \left(\frac{m}{2} \underline{u}^2 + e \right)}_{\text{konvektiver Anteil}} - \underbrace{T_{ij} u_j}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}} \right] = j \cdot \underline{F}$$

Energiescham-dichte

mit $q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$ (4.38)

... Wärmescham-dichte

(4.37)

= j · F
Leistung der äußeren Kräfte

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36): o.B.

$$\rightarrow \boxed{n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \right) e = - \nabla \cdot \underline{q} + T_{ij} \nabla_i u_j} \quad (4.38)$$

zeitliche Änderung der inneren Energie für bewegtes Vol. element

Wärme-fluss

mechan. Leistung der inneren Kräfte

4.4.2. Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

• Materialgesetz für Spannungstensor \underline{T} und Wärmescham-dichte q

≡ explizite Berechnung mit $f(q, p, t)$

Annahme: lokales GG

$$f_0(q, p, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp \left[- \frac{(p - m \underline{u})^2}{2m k_B T} \right] \quad (4.29)$$

mit $n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(q, t)$

Bem: $\left. \frac{\partial f_0}{\partial t} \right|_{\text{Stops}} = 0$, aber $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p) f_0 \neq 0!$

• Berechnung der Mittelwerte: (4.39)

$$\langle c_i c_j \rangle_0 \stackrel{(4.29)}{=} n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}$$

$c_i = \frac{p_i}{m} - u_i$

$$T_{ij}^0 = -m \langle c_i c_j \rangle = -P \delta_{ij}$$

mit $P = n k_B T$
... ideale Gasgleichung

$$q_i^0 = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0$$

$$ne = \frac{m}{2} \langle c^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T$$

... kalorische Zustandsgleichung

⇒ explizite Erhaltungssätze:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_q \quad (4.41)$$

(4.34) →

$$\frac{\partial}{\partial t} n = - \underline{\nabla}_q \cdot (n \underline{u}) \quad (4.42)$$

(4.36) $\frac{\nabla_i T_{ij} + \nabla_j T_{ij} - \nabla_i P}{- \nabla_i P}$

$$m n \frac{d}{dt} \underline{u} = - \underline{\nabla}_q P + n \underline{F}, \quad P = n k_B T \quad (4.43)$$

(4.38) $\frac{T_{ij} \nabla_i u_j}{= -P \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}}$

$$\frac{d}{dt} T = - \frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} \quad (4.44)$$

Strom: $\underline{q} = 0$

• Bemerkungen:

(1) Gl. (4.42) - (4.44) invariant unter Zeitumkehr
($t \rightarrow -t, \underline{u} \rightarrow -\underline{u}$)

→ enthalten keine Dissipation

→ Störungen des GG-Zustandes relaxieren
nicht gegen Null

(2) Verdeutlichung:

$$(4.42) \rightarrow \frac{d}{dt} n = -n \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \underline{u} \quad \text{in (4.44)}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \rightarrow \frac{3}{2} \underbrace{\frac{1}{T} \frac{d}{dt} T}_{\frac{d \ln T}{dt}} = \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\ln(n T^{-3/2})}_{\sim \text{lokale Entropie des Gases (o.B.)}} = 0!$$

~ lokale Entropie des Gases (o.B.)
ändert sich nicht

(3) (4.43) \equiv Eulersche Gl.

Behandlung von Strömungen kompressibler Gase

• Modenanalyse: