4.4.2. Hydrodynam. Gln. ohne Dissipation

- Annahme: lokales GG: $\quad f_0(q,p,t) = \ldots\ldots \qquad (4.29)$

$$
\begin{array}{ll}
(4.34) \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q \cdot (n\underline{u}) & (4.42) \\ mn \frac{d}{dt}\underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n\underline{F} \quad , P = n k_B T & (4.43) \\ \frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} & (4.44) \end{array}} \\
(4.36) \longrightarrow & \\
(4.38) \longrightarrow &
\end{array}
$$

- Modenanalyse von (4.42)–(4.44): s. Übungen

(i) Setze
$$
\begin{aligned}
n &= \bar{n} + \delta n(q,t) \\
T &= \bar{T} + \delta T(q,t) \\
\underline{u} &= \underbrace{0}_{\text{homogener GG-Zustand}} + \underbrace{\underline{u}(q,t)}_{\text{kleine Abweichung}}
\end{aligned}
$$

(ii) linearisiere (4.42)–(4.44) in δn, δT, $\underline{u}$

(iii) Löse durch Modenansatz:

$$
\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(\underline{k},\omega) \\ \delta T(\underline{k},\omega) \\ \underline{u}(\underline{k},\omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i\underline{k}\cdot q}
$$

$\longrightarrow$ Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\underline{k})$

(iv) Ergebnisse: 2 statische Schermoden: $\omega_{1/2} = 0$

1 statische Temp./Dichtemode: $\omega_3 = 0$

2 Schallwelle: $\omega_{4/5} = \pm c_s |\underline{k}|$

mit $c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k_B T}{m}}$ ... Schallgeschw.

<u>keine</u> Dämpfung

4.4.3 <u>Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation</u>

- Boltzmann-Gl.:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}[f] = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} \\ &\text{mit } \mathcal{L}[f] = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right] \\ &\left(\tfrac{\underline{p}}{m} = \underline{u} + \underline{c}\right) \quad = \left[\frac{d}{dt} + \underline{c}\cdot\underline{\nabla}_q + \frac{1}{m}\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_c\right] \end{aligned}} \quad (4.45)$$

- Problem: $\left.\frac{\partial f_0}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\mathcal{L}[f_0] \neq 0$, f_0 s. (4.28)

- Näherungslösung: „1. Ordnung"

(i) $f = f_0(1+\Delta)$ mit $\Delta \ll 1$

(ii) Relaxationszeitnäherung für Stoßterm:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$$

in Gl. (4.45) & $\mathcal{L}[f_0\Delta] \ll \mathcal{L}[f_0] \longrightarrow \mathcal{L}[f] \simeq \mathcal{L}[f_0]$

$$\boxed{\Delta = -\tau \frac{1}{f_0}\mathcal{L}[f_0] = -\tau\,\mathcal{L}[\ln f_0]} \quad (4.46)$$

berechne $\mathcal{L}[\ln f_0]$ & Annahme: $n(q,t)$, $\underline{u}(q,t)$, $T(q,t)$

in f_0 lösen (4.42)–(4.44)

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{f = f_0(1+\Delta) \quad \text{mit } \Delta = -\tau\frac{m}{k_B T}\left(c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3}\underline{c}^2\right)D_{ij} - \tau\left(\frac{m\underline{c}^2}{2k_B T} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_i}{T}\nabla_i T} \tag{4.47}$$

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ ... Deformationsrate

- Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A\rangle = \int d^3p\; A\, f_0(1+\Delta) = \langle A(1+\Delta)\rangle_0} \tag{4.48}$$

- Spannungstensor: „1. Ordnung"

$$T_{ij} \overset{(4.35)}{=} -m\langle c_i c_j\rangle \underset{(4.48)}{\overset{(4.47)}{=}} -m\left[\langle c_i c_j\rangle_0 - \frac{\tau m}{k_B T}\left\langle c_i c_j\left(c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3}\underline{c}^2\right)\right\rangle_0 D_{kl}\right]$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$\langle c_i c_j\rangle_0 = n\frac{k_B T}{m}\delta_{ij}$

$\langle c_i c_j c_k c_l\rangle_0 = n\left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 \times (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

$$\boxed{T_{ij} = -P\delta_{ij} + \underbrace{2\eta\left(D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk}\right)}_{T'_{ij}\ \dots\ \text{viskoser Spannungstensor}}}$$

mit $P = n k_B T$ ... Druck

$\eta = n k_B T\tau$ ... Scherviskosität

Deutung: (i) Scherströmung:

- $D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij} \neq 0 \rightarrow T'_{ij}$
- <u>nicht</u> zeitumkehrinvariant: $T'(-D_{ij}) = -T'(D_{ij})$

$\longrightarrow$ Dissipation

$\longrightarrow$ Relaxation von Schermoden ins GG

- $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{D}} = D_{ii} = \mathrm{div}\,\underline{u}$ ... Spur von $\underline{\underline{D}}$

also: $\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u} = 0$ für $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u}$!!

<u>reine</u> Kompression

NB: (4.42) $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt} n = - n \,\mathrm{div}\, \underline{u}$

also $\mathrm{div}\, \underline{u} = 0$ $\hat{=}$ inkompressible Strömung

(ii) <u>keine</u> Volumenviskosität

kein Beitrag $T'_{ij} \propto D_{ii} = \mathrm{div}\, \underline{u}$

. Wärmestromdichte: 1. Ordnung

$$q_i \overset{(4.38)}{=} \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle \underset{(4.48)}{\overset{(4.47)}{=}} - \frac{m\tau}{2} \langle \left(\frac{mc^2}{2k_BT} - \frac{5}{2} \right) c_i c_k c^2 \rangle_0 \frac{\nabla_k T}{T}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{q} = -\kappa \underline{\nabla}_q T \\ \text{mit } \kappa = \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m} \tau \end{array}} \quad \text{... thermische Leitfähigkeit}$$

$\underline{q} \sim - \underline{\nabla}_q T \longrightarrow \underline{q}$ gleicht $\underline{\nabla}_q T$ aus

$\longrightarrow$ Relaxation ins GG

. Hydrodynam. Gln:

(4.34) $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} n = - \underline{\nabla}_q \cdot (n \underline{u})$ (4.51)

(4.36) $\xrightarrow{\nabla_j T_{ij} = \ldots}$ $mn \frac{d}{dt} \underline{u} = - \underline{\nabla}_q P + \eta \underline{\nabla}_q^2 \underline{u} + \frac{2}{3} \eta \underline{\nabla}_q (\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u})$ (4.52)

(4.38) $\xrightarrow[T_{ij} \cdot \nabla_i u_j]{-\underline{\nabla}_q \cdot \underline{q}}$ $\frac{d}{dt} T = \frac{2\kappa}{3 n k_B} \nabla_q^2 T - \frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} + \frac{2}{3 n k_B} T'_{ij} \nabla_i u_j$ (4.53)

$ne = \frac{m}{2} \langle c^2 \rangle$
$= \frac{3}{2} n k_B T$

Bem.: (1) Gl. (4.52) $\equiv$ Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression $\eta_K + \frac{2}{3} \eta$ statt $\frac{2}{3} \eta$!

(2) Gl. (4.53): für $\nabla_i u_j = 0 \longrightarrow$ reine Diff.-Gl. für T

$T'_{ij} \nabla_i u_j$ ... nichtlinearer Term in $\underline{u}$!

- Modenanalyse: (wie in Kap. 4.4.2)

2 diffusive Schermoden:

Dispersionsrelation: $\omega_{1/2} = -i \frac{\eta}{m\bar{n}} k^2$

Dämpfungsrate $-i\omega \to 0$ für $k \to 0$

$\hat{=}$ hydrodynamische Mode

1 diffusive „Temperatur"mode ω_3

2 gedämpfte Schallwellen:

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2 \left(\frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\varkappa}{15 k_B \bar{n}} \right) + O(\tau^2)$$