

## 2.5. Verbundene Diagramme - Linked Clusters

---

oftmals wichtig ist Berechnung von Störungen  $V(t)$

in der Form

$$\left\langle T e^{\int_0^t dt' V(t')} \right\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \left\langle T V(t_1) V(t_2) \dots V(t_n) \right\rangle$$

Beispiele: a) Elektron-Phonon  $(ew)$

$$V \approx \phi \quad (\text{Phonon operator})$$

b) GW Bild f. Wellenfunktion:

$$i\hbar |\varphi_w\rangle = H_w(t) |\varphi_w\rangle$$

$$|\varphi_w\rangle = \underline{\underline{T_t e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_w(t')}}} |\varphi_w(t=0)\rangle$$

c) Zustandssumme:

$$sp(e^{-\beta H}) = sp(e^{-\beta H_0}) sp(\underbrace{T e^{-\int_0^\beta d\beta' H_w(\beta')}}_{\text{interaction}})$$

$$H = H_0 + H_w$$

↑  
freie System

Es lohnt sich über eine "geschichtete" Berechnung vor

zu machen!

### Liebert Cluster Theorem

alle Diagramme  
mitnehmen

$$\langle T e^{-\int_0^t dt' V(t')} \rangle = \sum_n W_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \langle T V_1 V_2 \dots V_n \rangle$$

$$= \exp\left(\sum_n W_n\right) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \langle T V_1 V_2 \dots V_n \rangle \right\}$$

nur verbundene Diagramme  
mitzählen

Frage: - Motivation d. Theorems  
 - was sind diese Diagramme?

Auswertung: independent Boson Modell:

$$1) \text{ Reihe: } 1 + \frac{0 \dots 0}{1!} + \frac{(0 \dots 0)^2}{2!} \dots = e^{0 \dots 0}$$

2) linked cluster Theorem:

$$\begin{array}{c} \textcircled{0 \dots 0} \\ \textcircled{0 \dots 0} \end{array} = (0 \dots 0)^2$$

$$e^{0 \dots 0}$$

nicht verbunden!

wir machen das wo plausibel:

V kann Fermionische, Bosonische Operatoren ...

$$V = V(a_i^\dagger, a_j, \phi), \quad V \text{ ist im WW-Bild}$$

am Beispiel der El-Phonon Kopplung

$$V = \sum_{u, u', \alpha} a_u^\dagger a_{u'} (b_\alpha^\dagger + b_\alpha) g_{u u'}^\alpha = \sum_{u, u'} a_u^\dagger a_{u'} \underline{\phi_{u u}}$$

ist die allgemeinste Wechselwirkung f. El-Ph. Stöße.

Wick Theorem hilft zeitgeordnete Produkte v. Operatoren

in "Grundbausteine" zu zerlegen:

$$G_{um}(t_1, t_2) = \langle T a_u^\dagger(t_1) a_m(t_2) \rangle \quad \text{Elektron propagator}$$

$$G_{um}^+(t_1, t_2) = \langle T a_u(t_1) a_m^\dagger(t_2) \rangle \quad (\text{Elektron-Fermi-fkt.})$$

$$D_{um}^{lk}(t_1, t_2) = \langle T \phi_{um} \phi_{lk} \rangle \quad \text{Phonon propagator}$$

Reihe  $W_u$  auslösen und auf  $U_u$  umschreiben (Plausibilitäts-  
zeitintegral erstreckt nicht mitgeschrieben betrachte.)

$$\underline{u=0} \quad \langle T \dots \rangle = 1$$

$$\underline{u=1} \quad \langle T V(t_1) \rangle = 0$$

$$\underline{u=2} \quad \frac{1}{2!} \langle T \underline{V(t_1)} \underline{V(t_2)} \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle T \sum_{\substack{u, \mu \\ l, k}} a_u^\dagger(t_1) a_\mu(t_1) \phi_{\mu u}(t_1) \underline{a_l^\dagger(t_2) a_k(t_2)} \phi_{lk}(t_2) \rangle$$

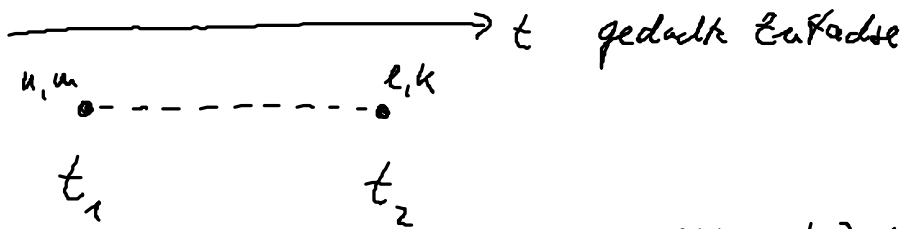
$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u, u \\ l, k}} \langle T \underbrace{a_u^\dagger(t_2) a_u(t_1)}_{***} \underbrace{a_l^\dagger(t_2) a_l(t_1)}_{***} \rangle \langle T \underbrace{\phi_{u,l}(t_1) \phi_{l,u}(t_2)} \rangle$$

Grundbau-  
 stei-  
 zerlegg.

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u, u \\ l, k}} D_{u,l}^{el}(t_1, t_2) \left( \underbrace{G_{u,u}(t_1, t_1) G_{l,k}(t_2, t_2)}_{-0} - 0 \right. \\ \left. + G_{u,l}^\dagger(t_1, t_2) G_{l,u}(t_1, t_2) \right)$$

geschichtete Darstellung durch Diagramme:

$$1) D_{u,l}^{el} = \sum_{\alpha} g_{u,\alpha}^\dagger g_{\alpha,l}^\dagger \left( u_\alpha e^{i\omega_\alpha(t_1-t_2)} + (1-u_\alpha) e^{-i\omega_\alpha(t_1-t_2)} \right)$$



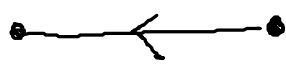
$$2) G_{u,u}(t_1, t_2) = \delta_{u,u} u_n e^{i\omega_u(t_1-t_2)}$$

Formel mit Index u  
 $i\omega_u(t_1-t_2)$



↑ Zusatz: Zeitintervall.

$$3) G_{u,u}^\dagger(t_1, t_2) = \delta_{u,u} (1-u_n) e^{-i\omega_u(t_1-t_2)}$$



Mit diesen Bildern  $\frac{1}{2} \langle T V_1 V_2 \rangle$  ausdrücken:

$$= \frac{1}{2} \left( \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right)$$

Diagram 1: A vertex on the left with two external lines, connected by a dashed line to a vertex on the right with two external lines. Labels: "α-Erzeugung" (with arrow pointing to the vertex), "Photon" (with arrow pointing to the dashed line), "Elektron vermittelt" (with arrow pointing to the vertex).

Diagram 2: Two vertices connected by a dashed line. Each vertex has a loop of a fermion line. Label: "Zusammengezogene u kontrahierte α-Linien" (with arrow pointing to the dashed line).

$$= \frac{1}{2} \left( \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \right)$$

Diagram 3: Two vertices connected by a dashed line. Each vertex has a loop of a fermion line. Label: "Doppelblase Diagramm" and "double bubble".

Diagram 4: A circular diagram with two vertices on the horizontal diameter, connected by a dashed line. The rest of the circle is a fermion loop. Label: "Auster-Diagramm" and "Oyster".

Figuran - Diagramme f. Darstellg. von  
Produkt von Propagatoren


$$W_2 = \langle T V_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \right) = U_2$$

alle, verschieden gebundenen Diagramme


u=3  $W_3 = \langle T V_1 V_2 V_3 \rangle = 0$

u=4  $W_4 = \langle T V_1 V_2 V_3 V_4 \rangle$

$$= \frac{1}{4!} \langle T \phi \phi \phi \phi \rangle \langle T a^\dagger a a^\dagger a a^\dagger a a^\dagger a \rangle$$



$$= \frac{3}{4!} \langle T \text{---} \rangle$$




$$= \frac{3}{4!} \left( \langle T \text{---} \rangle \langle T \text{---} \rangle \right) + \text{verbundene Diagramme } / 4!$$

nicht verbundene Diagramme

des Art  $u_2 : \left( \text{---} + \ominus \right) / \left( \text{---} + \ominus \right) =$

$$= \frac{3 \cdot 2!}{2 \cdot 3 \cdot 4} \langle T \text{---} \rangle^2 +$$

 + ...

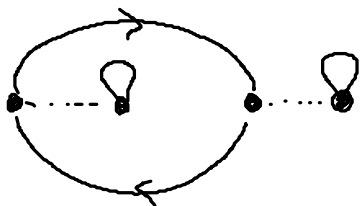
↑ nicht verbundene Diagramme (unlinked, unconnected)

$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{\text{verbunden } D}{4!}$$

$$\left( u_2 = \frac{1}{4!} \langle T V_1 V_2 \rangle \right)$$

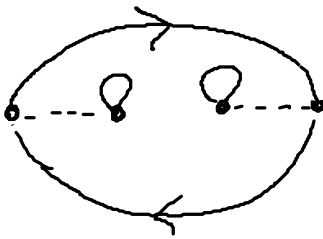
Was gibt es als verbundene Diagramme?

wenn die Bosonen heraus: 2 Blasen, 2 volle Propagatoren



wieviele Diagramme dieser Art mit demselben Ergebnis gibt es.

2x



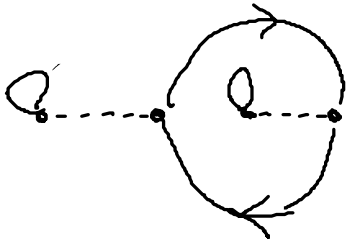
2x



$(u-1)!$

unterschiede die  
"topologisch"  
"äquivalent" sind

→ sieh nächste  
VL, genau



$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{6}{4!} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{alle} \\ \text{Diagramme die wirklich verschieden sind} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{1}{4} \cdot ( - u - )$$

$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + u_4$$

$u=6$  (Mittelp.)

$$W_6 = \frac{1}{6!} \langle T u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 \rangle =$$

$$= \frac{1}{3!} u_2^3 + u_2 u_4 + u_6$$



Man erkennt mit guter Wille, daß  $U_2$  der Beginn einer Exponentialreihe aufbaut:

$$\langle T e^{\int dt' v(t')} \rangle = \exp(U_2 + \dots)$$

$$U_n = \frac{1}{n} \langle T v_1 v_2 \dots v_n \rangle \quad \left| \begin{array}{l} \text{alle verbundenen Diagramme die} \\ \text{topologisch verschieden sind} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} \leftarrow \begin{array}{l} \text{topologisch äquivalente} \\ \text{Diagramme} \end{array}$$

↙ Vorfaktor aus Exp. Pot.

### einfachstes Beispiel

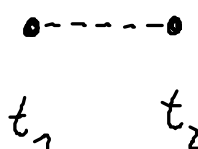
independent Boson:

die Reihe bricht f.  $n > 2$  ab.

$$\langle T e^{\int dt' \phi(t')} \rangle = e^{\sum_{n=1}^{\infty} U_n} = e^{U_2} = e^{\frac{1}{2} \int dt_1 \int dt_2 D(t_1 t_2)}$$

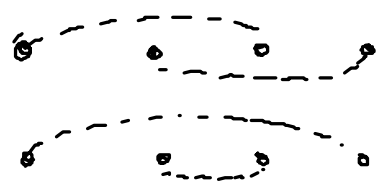
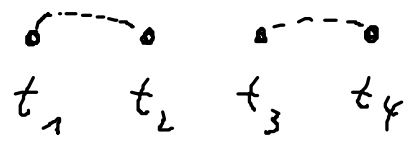
$$U_n = \langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n \rangle \frac{1}{n}$$

$n=1 \rightarrow$  kein Beitrag

$n=2 \rightarrow$  

$$u = 3 \rightarrow 0$$

$$u = 4 \rightarrow$$



Kein Baum und  
linked cluster