

## 2.5. Verbundene Diagramme - Linked Clusters

oftmals nötig ist Berechnung von Störungen  $V(t)$

in der Form

$$\left\langle \overline{T} e^{\int_0^t dt' V(t')} \right\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \langle \overline{T} V(t_1) V(t_2) \dots V(t_n) \rangle$$

Beispiele: a) Elektron-Phonon GW

$$V \approx \phi \quad (\text{Phonon operator})$$

b) GW Bild f. Wellenfunktion:

$$i\hbar |\varphi_w\rangle = H_w(t) |\varphi_w\rangle$$

$$|\varphi_w\rangle = \underline{\underline{\overline{T}_t e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_w(t')}}} |\varphi_w(t=0)\rangle$$

c) Zustandssumme:

$$sp(e^{-\beta H}) = sp(e^{-\beta H_0}) sp(\underline{\underline{T}} e^{\int_0^\beta d\beta' H_w(\beta')})$$

$$H = H_0 + H_w$$

↑  
freie System

Es lohnt sich über eine „geschichtete“ Berechnung vor

„            „ nachzudenken!

### Licht Cluster Theorem

alle Diagramme  
mitzählen

$$\langle T e^{\int_0^t dt' V(t')} \rangle = \sum_n W_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \langle T V_1 V_2 \dots V_n \rangle$$

$$= \exp\left(\sum_n W_n\right) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \langle T V_1 V_2 \dots V_n \rangle \right\}$$

nur verbundene Diagramme  
mitzählen

Frage: - Motivation d. Theorems  
 - was sind diese "Diagramme"?

Antwort: independent Boson Modell:

$$1) \text{ Reihe: } 1 + \frac{0 \dots 0}{1!} + \frac{(0 \dots 0)^2}{2!} \dots = e^{0 \dots 0}$$

2) liefert das Theorem:

$$\begin{matrix} \textcircled{0 \dots 0} \\ \textcircled{0 \dots 0} \end{matrix} = (0 \dots 0)^2 = e^{0 \dots 0}$$

nicht erlaubt!

wir machen das so plausibel:

V kann kanonische, Bosonisch Operatoren ...

$$V = V(a_i^\dagger, a_j, \phi), \quad V \text{ ist im WW-Bild}$$

am Beispiel der El-Phonon Kopplung

$$V = \sum_{u, \kappa} a_u^\dagger a_u \left( b_\kappa^\dagger + b_\kappa \right) g_{u\kappa} = \sum_{u, \kappa} a_u^\dagger a_u \phi_{u\kappa}$$

ist die allgemeinste Wechselwirkung f. El-Ph. Stöße.

Wid themm liefert zugeordnete Produkte v. Operatoren

in "Grundbausteine" zu zerlegen ::

$$G_{uu}(t_1, t_2) = \langle T a_u^\dagger(t_1) a_u(t_2) \rangle \quad \text{Elektronpropagator}$$

(Elektron-Freen-  
fkt.)

$$G_{uu}^\dagger(t_1, t_2) = \langle T a_u(t_1) a_u^\dagger(t_2) \rangle$$

$$D_{uu}^{el}(t_1, t_2) = \langle T \phi_{uu} \phi_{ue} \rangle \quad \text{Phononpropagator}$$

Reihe  $W_u$  ausbauen und auf  $U_u$  anschreiben (Plausibilitäts-  
zeitintegral erstreckt mit mitgeschriebe betrachte.)

$$\underline{u=0} \quad \langle T \dots \rangle = 1$$

$$\underline{u=1} \quad \langle T V(t_1) \rangle = 0$$

$$\underline{u=2} \quad \frac{1}{2!} \langle T \underline{V(t_1)} \underline{V(t_2)} \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle T \sum_{\substack{u, u \\ \ell, k}} a_u^\dagger(t_1) a_u(t_1) \phi_{u\ell}(t_1) \underline{a_\ell(t_2) a_k(t_2)} \phi_{k\ell}(t_2) \rangle$$

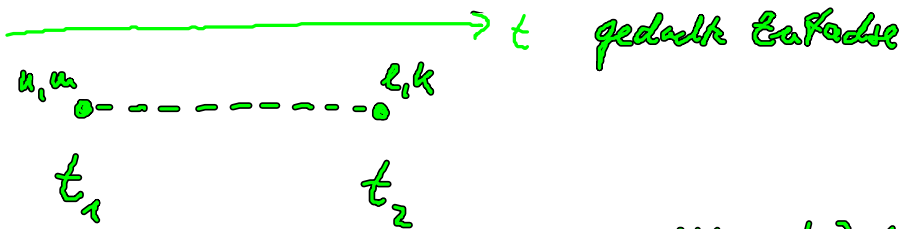
$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u_1, u_2 \\ l_1, l_2}} \langle T \underbrace{a_{u_1}^\dagger(t_2) / a_{u_1}(t_1)}_{* * +} \underbrace{a_{l_2}^\dagger(t_2) / a_{l_2}(t_1)}_{* * \vee} \rangle \langle T \underbrace{\phi_{u_1}(t_2) / \phi_{l_2}(t_1)} \rangle$$

Grundbau-  
 sti-  
 zuegg.

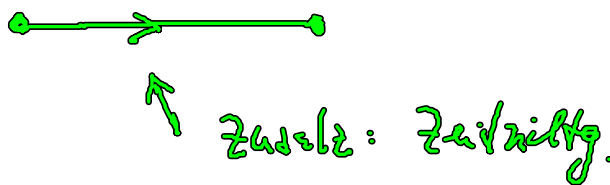
$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u_1 \\ u_2 \\ l_1 \\ l_2}} D_{u_1}^{l_2}(t_1, t_2) \left( \underbrace{G_{u_1 u_1}(t_1, t_2)}_{\dots\dots\dots} G_{l_2 l_2}(t_2, t_1) - 0 \right. \\ \left. + G_{u_1 l_2}^\dagger(t_1, t_2) G_{l_2 u_1}(t_1, t_2) \right)$$

geschichtete Darstellung durch Diagramme:

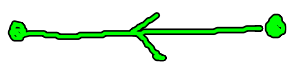
$$1) D_{u_1}^{l_2} = \sum_{\kappa} g_{u_1 \kappa} g_{\kappa l_2} \left( u_{\kappa} e^{i\omega_{\kappa} |t_2 - t_1|} + (1 - u_{\kappa}) e^{-i\omega_{\kappa} |t_2 - t_1|} \right)$$



$$2) G_{u_1 u_1}(t_1, t_2) = \delta_{u_1 u_1} u_{u_1} e^{+i\omega_{u_1} (t_1 - t_2)}$$



$$3) G_{u_1 l_2}^\dagger(t_1, t_2) = \delta_{u_1 l_2} (1 - u_{u_1}) e^{-i\omega_{u_1} (t_1 - t_2)}$$



Mit diesen Bildern  $\frac{1}{2} \langle T V_1 V_2 \rangle$  ausdrücken:

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \langle T \rangle \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Elektron vermittelt} \quad \text{Photon} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{Zusammengezogen} \\ \text{u. kontraktierte} \\ \text{G-Linien} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{Doppelblase Diagramm} \\ \text{double bubble} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{Auster-Diagramm} \\ \text{Oyster} \end{array} \right)$$

Figural - Diagramme f. Darstellung von  
Produkt von Propagatoren

$$W_2 = \langle T V_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) = U_2$$

alle, verschiedene verbundenen  
Diagramme

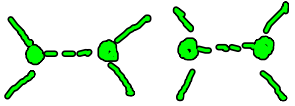
u=3  $W_3 = \langle T V_1 V_2 V_3 \rangle = 0$

u=4  $W_4 = \langle T V_1 V_2 V_3 V_4 \rangle$

$$= \frac{1}{4!} \langle T \phi \phi \phi \phi \rangle \langle T a^{\dagger} a a^{\dagger} a a^{\dagger} a a^{\dagger} a \rangle$$

 = 3 loops.

$$= \frac{3}{4!} \langle T \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rangle$$



$$= \frac{3}{4!} \left( \langle T \text{---} \text{---} \rangle \langle T \text{---} \text{---} \rangle \right) + \text{verbundene Diagramme / 4!}$$

nicht verbundene Diagramme

$$\text{des Art } U_2 : (O \text{---} O + \ominus) / (O \text{---} O + \ominus) =$$

$$O \text{---} O \text{---} O \text{---} O + \dots$$

↑  
nicht verbundene  
Diagramme  
(unlinked,  
unconnected)

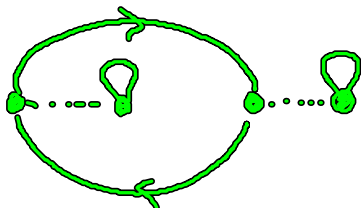
$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \langle T \text{---} \text{---} \rangle^2 +$$

$$= \frac{1}{2!} U_2^2 + \frac{\text{verbundene D.}}{4!}$$

$$\left( U_2 = \frac{1}{4!} \langle T U_1 U_2 \rangle \right)$$

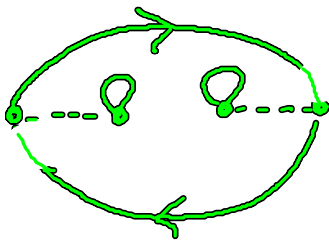
Was gibt es als verbundene Diagramme?

Wahrscheinlich heraus: 2 Blöcke, 2 volle Propagatoren

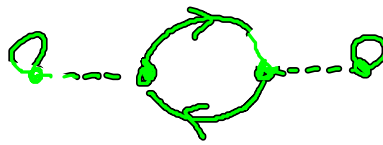


vielleicht Diagramm dieser Art mit demselben Ergebnis gibt es.

2x



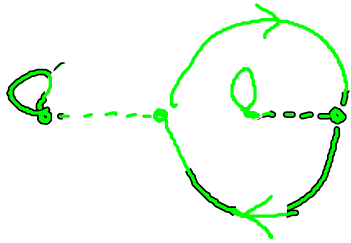
2x



↘ sich nicht  
VL, genau

$(k-1)!$

bedeutet die  
"topologisch"  
äquivalent sind



$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{6}{4!} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{all} \\ \text{Diagramme die wirklich geschieden sind} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{1}{4} \cdot ( \quad - \quad )$$

$$= \frac{1}{2!} u_2^2 + u_4$$

$k=6$  (Mittelp.)

$$W_6 = \frac{1}{6!} \langle T u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 \rangle =$$

$$= \frac{1}{3!} u_2^3 + u_2 u_4 + u_6$$



Man arbeitet mit guter Wille, daß  $U_2$  der Beginn einer Exponentialreihe aufbaut:

$$\langle T e^{\int dt' v(t')} \rangle = \exp(U_2 + \dots)$$

$$U_n = \frac{1}{n} \langle T v_1 v_2 \dots v_n \rangle \quad \left| \text{alle verbundenen Diagramme die topologisch verschieden sind} \right.$$

$$\frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} \leftarrow \begin{array}{l} \text{topologisch äquivalente} \\ \text{Diagramme} \end{array}$$

↖ Vorfaktor aus Exp. Pot.

## einfachstes Beispiel


independente Bosonen:

$$\langle T e^{\int dt' \phi(t')} \rangle = e^{\sum_{n=1}^{\infty} U_n} = e^{U_2} = e^{\frac{1}{2} \int dt_1 \int dt_2 D(t_1 t_2)}$$

die Potenzreihe f.  $u > 2$  ab.

$$U_n = \langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n \rangle \frac{1}{n}$$

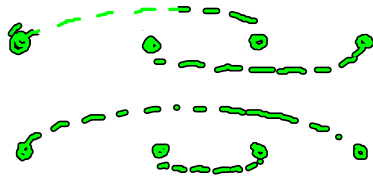
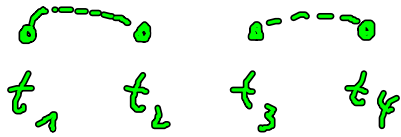
$u=1 \rightarrow$  kein Beitrag

$u=2 \rightarrow$  

$t_1 \quad t_2$

$$k = 3 \rightarrow 0$$

$$k = 4 \rightarrow$$



Kern Betrag und  
Licht cluster