

# VI 2. Supraleitung

## 2.1. Einleitung

$$H_{e-ph} = \sum_l \sum_q \underbrace{|D_q|^2}_{V_q} \frac{2\epsilon\omega_q}{(\epsilon - \epsilon_{-q})^2 - (\hbar\omega_q)^2} \left[ \underbrace{a_l^\dagger a_l}_{(1)} + \sum_k \underbrace{a_{l+q}^\dagger a_{l-q}^\dagger}_{(2)} a_l a_k \right]$$

### Experimentelle Befunde

i) Unterhalb einer Sprungtemperatur  $T_c$  besitzen bestimmte Stoffe eine unendliche Leitfähigkeit  $j = \sigma E \neq 0$

$T_c = T_c(M)$  mit  $M$  als Ionenmasse

=> Isotopeneffekt

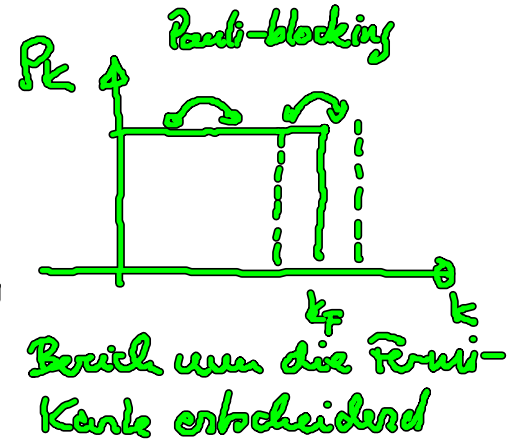
ii) Bei Anlegen eines Magnetfelds ist die magnetische Induktion im Supraleiter 0 (genauer: exponentieller Abfall)

Erklärung:  $\vec{j} \sim \vec{A}$   $\uparrow$  Meissner-Effekt

## 2.2. BCS-Modell (Bardeen-Cooper-Schrieffer, 1957)

Modellannahme: i)  $V_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = -V_0$  in Umgebung der Fermi-Kante

sonst  $V_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = 0$



$$H_{\text{el-ph}} = - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \sum_{\substack{S S' \\ \uparrow \\ \text{Spin}}} V_0 \underbrace{a_{S\uparrow\mathbf{k}}^{\dagger} a_{S'\uparrow\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger}}_{\substack{\text{Erzeugung} \\ \text{eines} \\ \text{Cooper-Paares}}} \underbrace{a_{S'\mathbf{k}} a_{S\mathbf{k}}}_{\text{Vernichtung}}$$

ii) Schwerpunktimpuls der Paare soll verschwinden  
d.h.  $\mathbf{L} = -\mathbf{k}$

iii) Feste Spinbeziehung: Elektronenpaare haben entgegengesetzten Spin

$$a_{\uparrow\mathbf{k}'}^{\dagger} a_{\downarrow-\mathbf{k}'}^{\dagger} a_{\downarrow-\mathbf{k}} a_{\uparrow\mathbf{k}} \quad \mathbf{k}' \equiv \mathbf{k} + \mathbf{q}$$

Umwandlung von Elektronenpaaren mit entgegengesetzten Spin und Impuls

Die übliche Hartree-Fock Zerlegung versagt bei der Beschreibung der Supraleitung.

Anderer Ansatz: Einführung von neuen Operatoren  $d_{\mathbf{k}}^{\dagger}, d_{\mathbf{k}}$

(Bosolmer)

Boguljubov-Trafo

$$H \rightarrow H_{\text{BCS}}(d^\dagger, d) \stackrel{!}{=} \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \left( d_{\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) + \Delta H_{\text{BCS}}$$

muß eine Bandlücke  
beinhalten (Bindungsenergie)

Korrektur

in Analogie zu Phononen

Ansatz

$$a_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} d_{-\mathbf{k}}^\dagger$$

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}} d_{-\mathbf{k}}$$

$$a_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} d_{-\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^\dagger$$

$$a_{-\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} d_{-\mathbf{k}}^\dagger - v_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}$$

Linearkombinationen  
der Elektronen -

Erzeugung und Vernichtungs

Operatoren

$u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$  werden so gewählt, dass  
 $H_{\text{BCS}}$  eine möglichst einfache Form hat.

Nach Einsetzen:

$$H_{\text{BCS}} = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{(1)} (d_{\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{k}} + d_{-\mathbf{k}}^\dagger d_{-\mathbf{k}}) + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{(2)} (d_{\mathbf{k}}^\dagger d_{-\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}} d_{-\mathbf{k}}^\dagger)$$

Grundzustands-  
Energie

$$+ \cancel{f (d_{\mathbf{k}}^\dagger d_{-\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{k}} d_{-\mathbf{k}})}$$

Streuung zwischen  
den neuen Quantenzuständen

$$i) [d_{\mathbf{k}}, d_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\text{es soll sich dabei um Fermionen handeln})$$

ii)  $E_k^{(2)} = 0$  (nichtlineare Anregungen sollen nicht betrachtet werden)

↗ i) und ii) können realisiert werden, da die  $u_k$  und  $v_k$  noch nicht festgelegt sind

$$i) \Rightarrow u_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2}} \right)^{1/2}$$

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2}} \right)^{1/2}$$

$\Delta \equiv V_0 \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}$  muß noch bestimmt werden

Der neue <sup>effektive</sup> H-Operator ist diagonal bzgl. der neuen Operatoren. H hat also die Gestalt eines WW-freien Fermionen-Systems. Die neuen Quanten (Fermionen) entsprechen aber nicht den Cooper-Paaren, die Bosonen sind.

Grundzustandsenergie:

$$E_0 = \sum_k 2\varepsilon_k v_k^2 - V_0 \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \sum_k u_k v_k$$

Angelegte Energie

$$E_k^{(4)} = \varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2V_0 u_k v_k \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}$$

Überprüfblatt

- Absenkung der Grundzustandsenergie im Vergleich zum normalleitenden Zustand

$$\Delta E = E_0 - 2 \sum_k \epsilon_k < 0 \quad \Rightarrow \text{Übung}$$

Nach Einsetzen der  $u_k$  und  $v_k$  erhält man: Übung

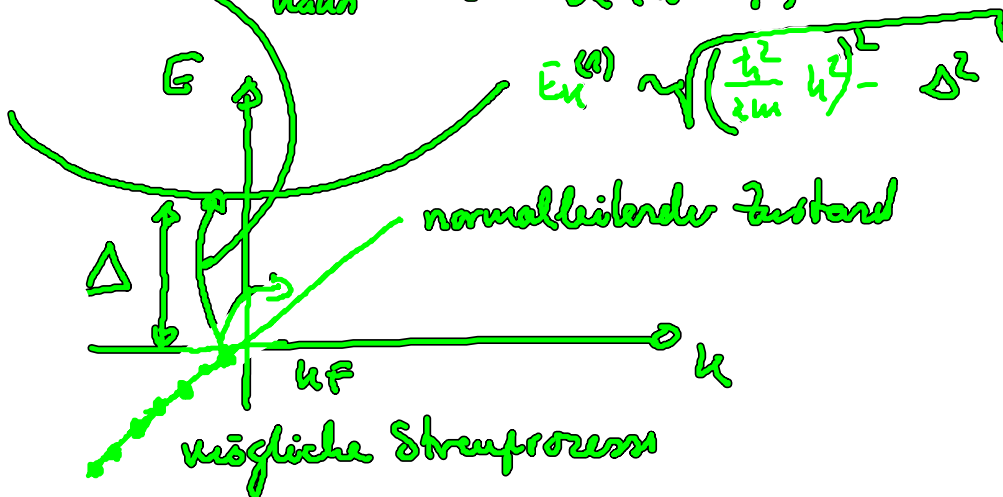
$$E_k^{(s)}(u_k, v_k) = \bar{E}_k^{(s)}(\epsilon_k, \Delta) = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} \quad \text{R. Energielücke}$$

→ Auftreten einer Energielücke in der Bandstruktur

Diskussion der Ergebnisse

$$E_k \rightarrow E_k - E_F = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \sim (k - k_F + k_F)^2 - k_F^2$$

im SL muß eine Energielücke überwinden werden, damit Streuung stattfinden kann  $\sim \propto (k - k_F)$



### 2.3 Bestimmung der Energielücke $\Delta$

$$\Delta = V_0 \sum_k u_k v_k = V_0 \sum_k \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}\right) \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}\right)}$$

$$\Delta = V_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \right)^{1/2} \quad | \quad \frac{1}{\Delta}$$

Selbstkonsistente Gleichung für  $\Delta$

$$1 = V_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2 - \epsilon_{\mathbf{k}}^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \frac{1}{\Delta^2} \right)^{1/2}$$

$$= V_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}}$$

$$= \frac{V_0}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} dE D(E) \frac{1}{(E^2 + \Delta^2)^{1/2}}$$

Debye-Energie  
 $\hbar\omega_D$  = typische  
 Phononenergie  
 um die  
 Fermikante

↑ Zustandsdichte  
 Annahme:  $D(E) \approx D(E_F) = D_0$

$$1 = V_0 D_0 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \hbar\omega_D \frac{1}{\sinh \frac{1}{V_0 D_0}} \approx 2 \hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0 D_0}}$$

$\frac{1}{2} (e^{\frac{1}{V_0 D_0}} - e^{-\frac{1}{V_0 D_0}})$   
 $V_0$  klein  $\uparrow$

## 2.4. Grundzustand

Forderung:  $\langle c_{\mathbf{k}} | g \rangle = 0$

Abbruchbedingung analog  
 zum harmon. Oszillator

ii) Normierung

$$\langle g | g \rangle = 1$$

$$\text{mit } \langle g | H | g \rangle = E_0$$

gefüllte  
Fermikugel  
/ das nicht

Ansatz:  $|g\rangle = \prod_{k > k_F} (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) | \Phi_0 \rangle$  ww-Fermipaar  
erzeugt El-Paare  $a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger$  außerhalb der  
Fermi-Kugel

$v_k$  ist ein Maß für die Zahl der Cooper-Paare

$v_k = 0 \Rightarrow$  keine Cooper-Paare

Im SL-Zustand besteht der gute Grundzustand aus  
Cooper-Paaren, die durch eine Energielücke von den angeregten  
Zuständen getrennt sind.

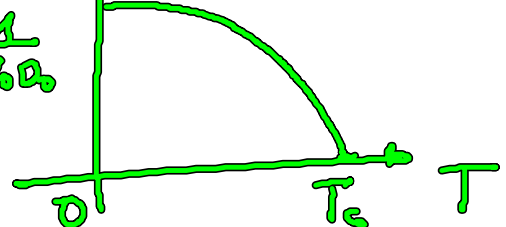
Um den Stromfluß der Cooper-Paare zu unterbrechen, muß  
min.  $\Delta$  aufgebracht werden. Typische Anregungen wie  
Störstellen, El-El-WW sind dafür nicht ausreichend.

Bei  $T \neq 0$  wird die Fermi-Kante aufgeweicht

Hier gilt  $\Delta \rightarrow \Delta(T)$   $\Delta(T) \Delta$

Man kann  $T_c \sim \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{v_0 a_0}}$

$T_c$  ist die kritische Temperatur,



unterschied der ein Stoff supraleitend wird

$$k_B T_c \sim \hbar \omega_D \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ Ionenmasse } (M)$$

$$T_c \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ Isotopeneffekt}$$

Isotope des gleichen chem. Elements zeigen unterschiedliche kritische Temperatur  $T_c$ .

## 2.5. Supraleitender Strom

Für normalleitende Stoffe gilt das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ d.h. } \vec{j} \sim \vec{E}$$

Für Supraleiter gilt  $\vec{j} \sim \vec{A}$

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \sum_{n_1, n_2} \varphi_{n_1}^*(r) [\vec{p} - q\vec{A}] \varphi_{n_2}(r) a_{n_1}^\dagger a_{n_2} + \text{c.c.}$$

Normalleiter: Beide Beiträge ( $\vec{p}$  und  $\vec{A}$ ) kompensieren sich, d.h. es fließt kein Strom

Supraleiter: 1. Term fällt weg infolge der Energielücke an der Fermi-Kante, d.h.  $\vec{j} \sim \vec{A}$

Londonische Gleichung: 
$$\vec{j}_L = - \frac{q^2}{m^* n_{el}} \vec{A}$$



Notation: Drude-Modell  $m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}$ ,  $\vec{j} = nq\vec{v}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{j}} = nq\dot{\vec{v}} = \frac{nq^2}{m}\vec{E}$$

$$= -\frac{nq^2}{m}\vec{A}$$

$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\phi$ ,  $\phi = 0$

Daraus folgen die Materialgleichungen der SL-Theorie  
(London'sche Gleichungen)

$$\text{rot } \vec{j} = -\frac{q^2}{m} n \text{ rot } \vec{A} = -\frac{q^2}{m} n \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{j} = -\frac{q^2}{m} n \dot{\vec{A}} = \frac{q^2}{m} n \vec{E}$$

Einsetzen in Maxwell-Gl.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\underbrace{\text{rot rot } \vec{B}}_{-\Delta \vec{B}} = \mu_0 \text{ rot } \vec{j} = -\mu_0 \frac{q^2}{m} n \vec{B}$$

da  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Daraus folgt:  $\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0 q^2 n}{m} \vec{B}$

Vereinfachend betrachten wir ein ideales B-Feld

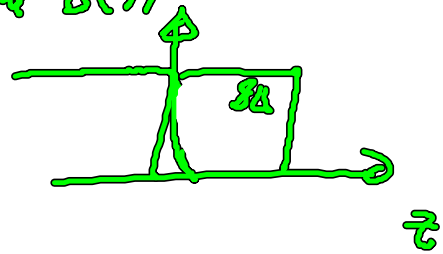
$$\partial_z^2 B_z = \frac{\mu_0 q^2 n}{m^*} B_z$$

Lösung der DGL:  $B_z = B_0 e^{-z/\lambda_L}$

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\mu_0 q^2 n}{m^*}} \quad \text{London'sche Eindringtiefe}$$

Das Magnetfeld fällt also in einem SL  
exponentiell auf die charakteristische  $B(\rightarrow)$

Laufe  $\lambda_L$  ab im Inneren eines SL



Ein Magnetfeld ist also nur in  
einer dünnen Schicht an der  
Oberfläche des SL spürbar und verschwindet  
im Inneren.

Größenordnung der Eindringtiefe  $\lambda_L \sim 10 \text{ nm}$   
(Meissner-Effekt)