

3. Diagramme: Verwendung, Interpretation, Observable

Idee: geht es auf einer Stufe der Theorie Bilder zu machen (physikalische Prozesse) und diese dann mit Leben (Formeln) zu füllen? \rightarrow 2-3 VL bis dahin

3.1. Diagramme und LCT

angestrebt ist Plausibilitätsbeweis für beliebige Wechselwirkung (SE-Photon, SE-EB WW), zur Erinnerung, LCT bedeutet, daß:

Zeitgeordnete exp-Funktionen bzw. Reihe so entwickelt werden:

$$\left\langle T \exp \left(\int_0^t dt' V(t') \right) \right\rangle = \sum_n W_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n \langle T V(t_1) \dots V(t_n) \rangle$$

$$= \exp \left(\sum_e \tilde{u}_e \right) = \exp \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int dt_1 \dots \int dt_l \langle T V(t_1) \dots V(t_l) \rangle \right)$$

über alle verbundenen Diagramme

$$= \exp \left(\sum_e U_e \right) = \exp \left(\sum_{e=1} \frac{1}{e} \int dt_1 \cdots \int dt_e \langle T V(t_1) \cdots V(t_e) \rangle_{\text{WD}} \right)$$

über alle verbunden - verschieden Diagramme

Bemerkungen:

a) $V(t)$ ist eine Wechselwirkung in H im W -Bild der QH

z.B. $\sum_{q_1, q_2} a_{q_1}^+ a_{q_2} \phi_{q_1 q_2}$ (El-Ph. Kopplg.)

b) Jeder Term W_n, U_e, \tilde{U}_e kann über Summe von Diagrammen (z.Z!) dargestellt werden,

z.B.: $\int dt_1 \langle T V(t_1) \rangle \approx \int dt_1 (a_{q_1} + \dots)$

Es existiert (zu!) Diagramme in der n -ten Ordnung der Störperturbation für W_n .

Um zu vereinfachen, hat man LCT:

Schränkt Zahl der Diagramme ein!

c) in \tilde{U}_e treten nur verbunden Diagramme auf:

nicht verbunden sind:

$$W_n \sim \int dt_1 \dots \int dt_n \langle T V_1 \dots V_m V_{m+1} \dots V_n \rangle$$

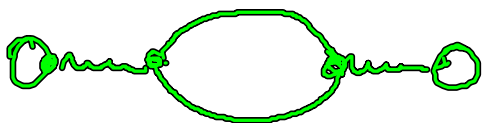
$$= \underbrace{\int dt_1 \dots \int dt_m \langle T V_1 \dots V_m \rangle}_{\text{faktorisier bzgl. Zeitintegration}} \underbrace{\int dt_{m+1} \dots \int dt_n \langle T V_{m+1} \dots V_n \rangle}_{\text{faktorisier bzgl. Zeitintegration}}$$

faktorisier bzgl. Zeitintegration

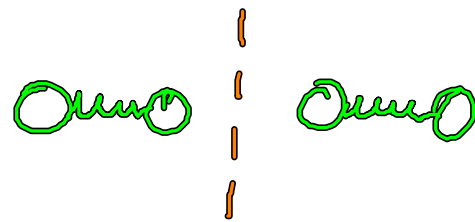
verbundene Diagramme faktorisieren nicht!

in Bildern:

verbunden:



nicht verbunden



man kann Schnitt legen, ohne Zerstörung
weil die in Zeitintegration faktorisieren.

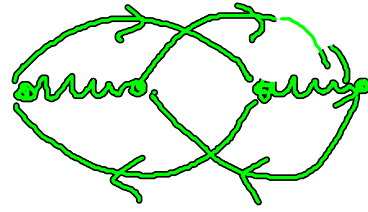
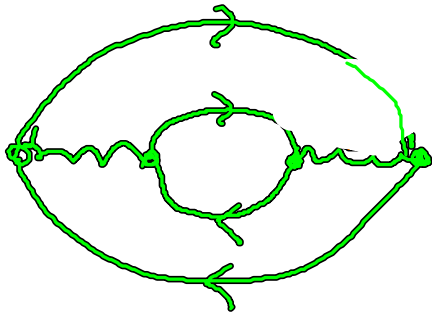
d) ^{nur wenn} ^{nicht} verbundene ^{topologisch äquivalent} Diagramme betrie in U_c auf

verschieden $\left(\begin{matrix} \text{nicht} \\ \text{topologisch äquivalent} \end{matrix} \right) =$

sind die verbundenen Diagramme, die

durch eine Tausch von Zeitvariablen t_i, t_j

mit an einander herangehen



t_1 t_2 t_3 t_4

denk $t_3 \leftrightarrow t_4$ in 2. Diagramm
kann das erst erzeugt werden
(Überlappung $t_4 \rightarrow t_3$)

Dann sind diese Diagramme gleich,
weil $\int dt_3 \int dt_4 = \int dt_4 \int dt_3$

→ man kriegt Faktor 2

Es gibt in jeder Ordnung U_e die verbundenen

Diagramme $(e-1)!$ äquivalente Diagramme

zu einer der verbundenen Diagramme

$$\sum_e \frac{1}{e!} \Rightarrow \sum_e \frac{(e-1)!}{e!} = \frac{1}{e} \Rightarrow U_e$$

e) Es gilt weiter Symmetrie die man
 zusätzlich in verbundenen Diagramme unter kann,
 z.B. vertauscht u. Summe index 12

Coulomb-WW $V_{1234} = V_{2143}$

(Später)

→ keine Fadung

die Beweise eher strenges fassen, plausibel machen:

a) Wechselwirkungen

wobei $\mathcal{E}-\mathcal{P}$ und $\mathcal{E}-\mathcal{E}-\mathcal{W}$ einheitlich beschreiben
 (zumindest ähnlich)

stärker $\mathcal{E}-\mathcal{P}-\mathcal{W}$: $V(t) = \sum_{i, m_i, \alpha} g_{i m_i \alpha}^\alpha \phi_\alpha(t) a_{i m_i}^\dagger(t) a_{i m_i}(t)$

Störreihe in $W_k = \langle T V(t_1) V(t_2) \dots V(t_k) \rangle =$

$= \sum_{(i, m_i)} \langle T \sum_{(\alpha_i)} g_{i_1 m_{i_1}}^{\alpha_1} g_{i_2 m_{i_2}}^{\alpha_2} \dots g_{i_k m_{i_k}}^{\alpha_k} \phi_{\alpha_1}(t_1) \phi_{\alpha_2}(t_2) \dots \phi_{\alpha_k}(t_k) \rangle$

$$\cdot \langle T a_{n_2}^\dagger(t_1) a_{n_1}(t_1) a_{n_2}^\dagger(t_2) a_{n_1}(t_2) \dots a_{n_2}^\dagger(t_n) a_{n_1}(t_n) \rangle$$

↑
(wie 3)

ansatz der 1. Klammer:

$$\langle T g_1 g_2 \dots g_n \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle =$$

$$\sum_{\text{alle Kombinationen}} D_{n_1 n_2}^{u_1 u_2}(t_1 - t_2) \underbrace{D_{n_3 n_4}^{u_3 u_4}(t_3 - t_4) \dots D}_{\text{Produkt v. Photon propagator}} \dots$$

t_i, t_j
und Wick

Produkt v. Photon propagator

wie viele Kombinationen, also Summande

gibt es? bedeutet beim independent Born-Modell

$$(2n-1)(2n-3) \dots 1 = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \quad (\text{siehe VL 2/3})$$

wir kombinieren nun passende D's mit $a^\dagger, a, a^\dagger, a$ zu
einer effektiven $El-El-WW$:

$$a_{u_1}^+ \uparrow \quad \cdots \quad \uparrow a_{u_2}^+ \\ a_{u_1} \downarrow \quad \cdots \quad \downarrow a_{u_2} \\ \hline t_1 \quad t_2 \quad t$$

$$\cong D_{u_1 u_2}^{u_2 u_1} (t_1 - t_2) a_{u_1}^+(t_1) a_{u_2}(t_1) a_{u_2}^+(t_2) a_{u_1}(t_2)$$

Die Phonon tauchen wir noch als WW-Potential auf!

leicht $W_u = \frac{1}{(2u)!} \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_{2u} \langle T V_{u_1} - V_{u_2} \rangle$

↗
 nur geradzellige
 WW Zahl tauchen
 auf

$$= \frac{1}{u!} \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_u \langle T \underline{V^{PK}(t_1)} V^{PK}(t_2) \cdots V^{PK}(t_u) \rangle$$

$$V^{PK}(t) = \int_0^{t_1} dt_1' \frac{1}{2} \sum_{\substack{u_1 u_2 \\ u_2 u_1}} D_{u_1 u_2}^{u_2 u_1} (t_1 - t_1') a_{u_1}^+(t_1) a_{u_2}^+(t_1') \\ a_{u_2}(t_1') a_{u_1}(t_1)$$

Das ist eine effektive El-El-WW,

die allerdings zeitretardiert ist:

da Phonon braucht Zeit, um

1. Erzeugnisoperator kann mit $2n$ Vermittler kombiniert
 werden. , ist der 1. Erzeuger weg, folgen dann f .
 der höchst $2n-1$ Vermittler

$$(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \dots = (2n)!$$

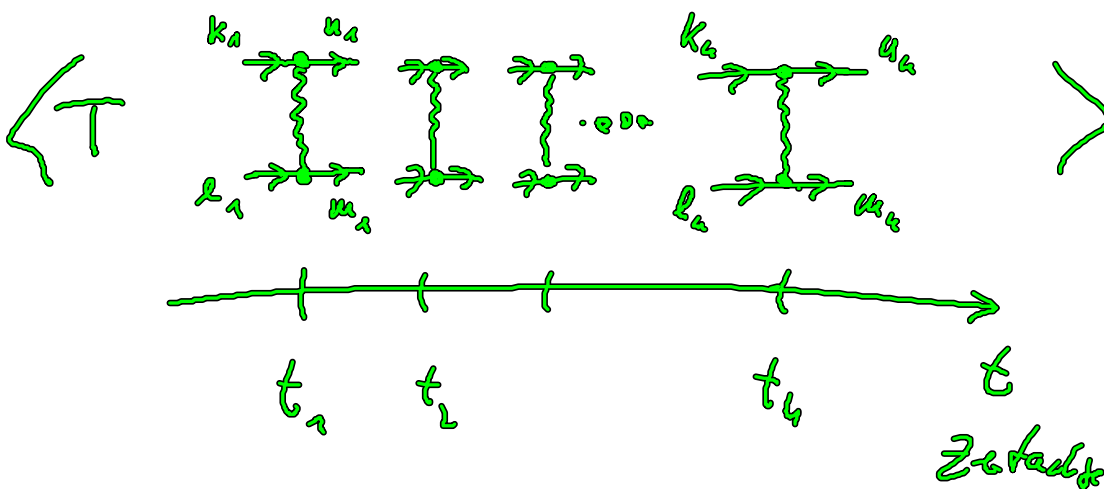
Man weiß also $(2n)!$ Summanden Schritte
 oder $(2n)!$ Bild machen

Graphische Darstellung:

$$\langle T \ V_{a_1 a_2 l_1 k_1} \ a_{u_1}^\dagger(t_1) a_{u_1}^\dagger(t_2) a_{k_2}(t_2) / a_{l_2}(t_2) \dots$$

$$\ V_{u_2 u_2 l_2 k_2} \ a_{u_2}^\dagger(t_2) / a_{u_2}^\dagger(t_2) a_{k_2}(t_2) / a_{l_2}(t_2) \rangle$$

wird dargestellt durch:



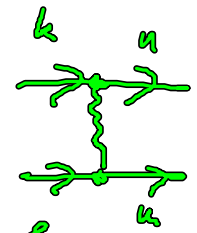
kurzer, einfacher Bsp:

$$\langle T V^{d=2}(t) \rangle = \langle T \sum_{u, m, k} V_{u, m, k} a_u^\dagger(t) a_m^\dagger(t) a_k(t) a_e(t) \rangle$$

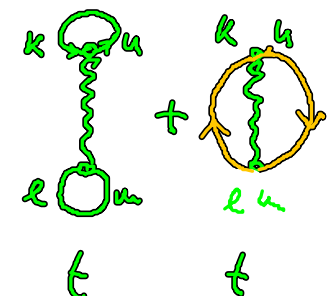

$$= \sum V_{u, m, k} \left(-G_{mk}(0) G_{ue}(0) + G_{ue}(0) G_{mk}(0) \right)$$

↑
Ward Wick (2.1)! = 2 = 2 Terme)

führt in Bild:

$$\langle T V^{d=2}(t) \rangle = \langle T \text{ [Diagram] } \rangle =$$


2 Summande zu finden: =

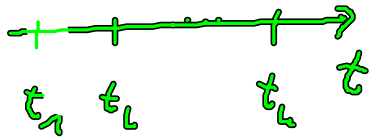


Ziel: die umgekehrte Weg zu gehen

Feynman-Regel f. die graphische Berechnung der

k-k Ordnung der $\mathcal{L}-\mathcal{L}-WW$ (make \rightarrow Reduz.)

1.) man denkt sich ein Zeitachse



2.) G, G^+ sind Pfeile die WW - Punkte

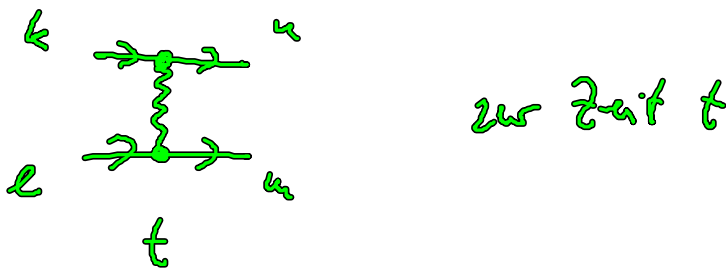
verbinden $G_{ae}(t_1, t_2) = \overset{a}{\longrightarrow} \overset{e}{\longrightarrow}$
 $t_1 \quad t_2$

$$G_{ku}^+(t_1, t_2) = \overset{k}{\longleftarrow} \overset{u}{\longleftarrow}$$

$t_1 \quad t_2$

Lage und Kinung. d. Pfeile soll kein Rollenspiel

3.) WW V wird in Illange Linie dargestellt:



Die Punkte werden als Vertices (Verte) bezeichnet

Sie bedeuten die Vermittler / Erzeuger durch

Ein- und Auslauf der Linien

und sind Ende bzw. Anfangspunkte der

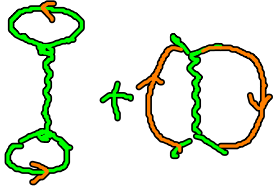
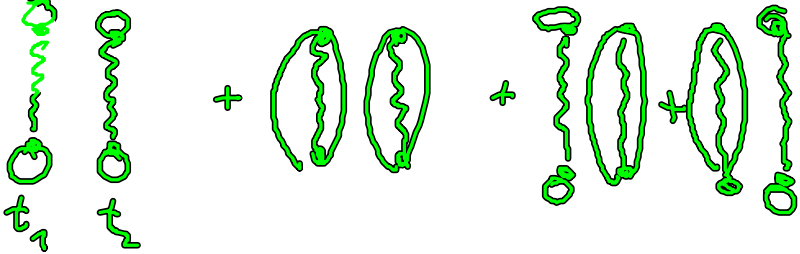
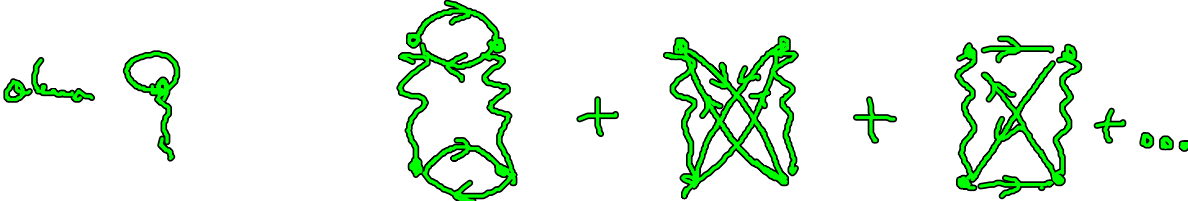
G_2 -Linien um die Kommunikation auszuführen.

um das W_n in n -ter Ordnung zu bestimmen m.p.:

a) n -WW auf Zeitachse machen

b) alle mögl. Verbindungen (G, G^T) ausführen
und alle $(2n!)$ Diagramme konstruieren

Bsp f. El-El-WW:

Ordnung (n)	Diagrammzahl $(2n)!$	Diagramme
0 (W_0)	1	1
1 (W_1)	2	
2 (W_2)	24	 <p style="text-align: center;">unvollständig</p>
		

t_1 t_2

3 (w_3) 720